



径向“有效势能”的性质及其应用

郑 金

(凌源市职教中心 辽宁 朝阳 122500)

(收稿日期:2021-11-03)

摘 要:推导了质点在有心力作用下在极坐标系中具有的能量表达式,引出了质点在转动参考系中的有效势能公式,得出了有效势能的取值范围和极值条件,指出了有效势能在平衡点关于矢径的二阶导数的物理意义,利用有效势能的性质巧妙解答两道物理竞赛题.

关键词:有心力 有效势能 取值范围 极值条件 等效劲度系数

1 归纳有效势能的性质

对于质点在有心力作用下的曲线运动,在极坐标系中的总能量为

$$E = \frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{1}{2}mv_\theta^2 + E_p$$

由于质点的角动量守恒,则 $L = mv_\theta r$ 保持不变,因此总能量为^[1]

$$E = \frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + E_p$$

式中第一项为径向动能,第二项为横向动能,第三项为保守力势能.对于惯性系中的横向动能 $\frac{L^2}{2mr^2}$,在转动参考系中表示离心惯性力对应的势能即离心势能,证明如下.

设某时刻质点到力心的距离为 r ,极径转动的角速度为 ω ,则质点受到向心力的大小为 $F = mr\omega^2$.若以转动的极径为参考系,则质点受到惯性力的大小为 $F' = mr\omega^2$,方向从力心沿矢径向外.由于角动量守恒,即 $L = m\omega r^2$ 保持不变,则 $F' = \frac{L^2}{mr^3}$.惯性力具有保守力的性质,若以无穷远处为势能零点,则利用“物体在某点具有的势能等于物体从所在位置移到势能零点的过程中保守力做的功”可知,离心势能为^[2]

$$V(r) = W = \int_r^\infty \frac{L^2}{mr^3} dr = \frac{L^2}{2mr^2}$$

因此,可把第二项与第三项之和称为径向运动的“有效势能”,记为^[1]

$$U_{\text{eff}} = \frac{L^2}{2mr^2} + E_p$$

由于系统的总能量守恒,即 $E = \frac{1}{2}mv_r^2 + U_{\text{eff}}$ 保持不变,而 $\frac{1}{2}mv_r^2 \geq 0$,可知 $U_{\text{eff}} \leq E$.这表明,有效势能不大于总能量.这是有效势能的取值范围.

在径向运动的转折点,质点到力心的距离可达到最大值或最小值,而且速度与矢径垂直,则径向速度为零,径向动能 $\frac{1}{2}mv_r^2$ 为零,因此,系统的有效势能达到最大值,即 $U_{\text{eff}} = E$.

有效势能函数关于矢径的一阶导数等于质点在转动参考系中受到的径向合力.当有效势能的一阶导数为零时,质点在径向受力为零,在平衡位置处于相对平衡状态,此时径向速度达到最大,则径向动能取最大值,因此有效势能取最小值.

弹簧振子的弹性势能为 $E_p = \frac{1}{2}\kappa x^2$,对势能函数取一阶导数可得 $E'_p = \kappa x$,等于回复力的大小;取二阶导数可得 $E''_p = \kappa$,等于弹簧的劲度系数.由此推知,一维谐振系统的势能 $U(x)$ 在平衡位置 $x = x_0$ 处的二阶导数为等效劲度系数,即 $\kappa' = U''(x_0)$.

对于一维小振动,势能曲线在局部范围内的最低位置,都是稳定的平衡点,因此,质点围绕平衡点 $x = x_0$ 的小振动是简谐运动^[3];势能函数 $U(x)$ 在平衡点附近展开成泰勒级数,可近似表示为 $U(x) = \frac{1}{2}U''(x_0)x^2$,这类似于弹簧的弹性势能^[3],因此势

能的二阶导数相当于等效劲度系数. 对于有心力作用下的曲线运动, 若径向运动是微小振动, 则为简谐运动, 那么有效势能在径向平衡点的二阶导数为等效劲度系数.

有效势能的公式、有效势能的取值范围、有效势能的极值条件、有效势能函数关于矢径的一阶导数的物理意义以及有效势能函数在平衡点关于矢径的二阶导数的物理意义, 实际都是物理学中的二级结论, 若直接用来解答有关的物理问题, 则可省略某些推导过程, 由此起到化繁为简的作用.

2 应用有效势能的性质

对于质点在有心力作用下的某些物理问题, 可利用有效势能的表达式把复杂的二维运动问题转化为一维运动问题来解决. 这种方法独特新颖, 简便快捷. 下面以两道物理竞赛题为例进行分析^[4].

【例1】如图1所示, 两个同轴带电无限长半圆柱面, 内外圆柱面半径分别为 a 和 b , 设在 $a < r < b$ 区域内只有径向电场, 已知场强的分布为 $E = \frac{k}{r}$, 电势的分布为 $U = k \ln \frac{b}{r}$, 其中 k 和 b 为常量. 现有质量为 m , 带电荷量为 $-q$ ($q > 0$) 的粒子组成的粒子束以大小相同的初速度 v_0 从左方 A 处射入, 不计电荷间的相互作用, 其中初速度方向与入射处截面垂直的带电粒子刚好沿半径为 R ($a < R < b$) 的半圆轨道运动. (1) 求初速度 v_0 的大小; (2) 若其他粒子的入射方向与半圆轨道的切线偏离一个很小的角度 β , 粒子将偏离半圆轨道, 设新轨道与半圆轨道相交于图中的 P 点, 试证明, 对于很小的 β 角, 粒子束可在 P 点准确聚焦, 且该位置与 β 无关, 并求出 P 点的方位角 $\angle AOP$ 的数值.

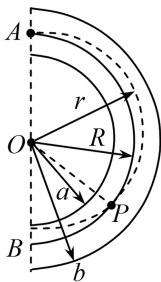


图1 例1题图

解析: (1) 当初速度方向与入射处截面垂直时,

负电荷受到的电场力提供粒子做匀速圆周运动的向心力, 则有 $q \frac{k}{R} = m \frac{v_0^2}{R}$, 可得

$$v_0 = \sqrt{\frac{kq}{m}}$$

(2) **方法1:** 利用回复力求周期

若以转动的极径为参考系, 则质点受到惯性力的大小为 $F' = mr\omega^2$, 方向从力心沿矢径向外. 由于角动量为 $L = m\omega r^2$, 可得惯性力大小为

$$F' = \frac{L^2}{mr^3}$$

如图2所示, 由在有心力作用下角动量守恒, 可知 $L = mv_\theta r = mv_0 R \cos \beta$, 则 $F' = \frac{mR^2 v_0^2 \cos^2 \beta}{r^3}$. 由于 β 很小, 则 $\cos \beta \approx 1$, 可知质点在转动参考系中受到径向合力的大小为

$$F = \frac{qk}{r} - \frac{mR^2 v_0^2}{r^3}$$

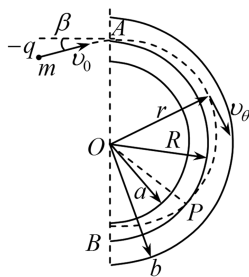


图2 粒子运动分析图

当粒子的入射方向与半圆轨道的切线偏离一个很小的角度 β 时, 粒子偏离径向平衡位置的位移 x 很小, 即 $x \ll R$, 可知

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R+x} = \frac{1}{R} \frac{1}{1+\frac{x}{R}} \approx \frac{1}{R} \left(1 - \frac{x}{R}\right)$$

同理

$$\frac{1}{r^3} \approx \frac{1}{R^3} \left(1 - \frac{3x}{R}\right)$$

可得

$$F \approx -\frac{mR^2 v_0^2}{R^3} \left(1 - 3\frac{x}{R}\right) + \frac{qk}{R} \left(1 - \frac{x}{R}\right)$$

考虑到 $\frac{kq}{R} = m \frac{v_0^2}{R}$, 则

$$F = 3 \frac{mv_0^2}{R^2} x - \frac{mv_0^2}{R^2} x = \frac{2mv_0^2}{R^2} x$$

由此可知等效劲度系数为

$$\kappa' = \frac{2mv_0^2}{R^2}$$

所以,径向运动的周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\kappa'}} = \frac{\sqrt{2}\pi R}{v_0}$$

利用简谐运动的对称性可知,粒子从初始位置运动到交点 P 经历的时间为半个周期,即

$$t = \frac{T}{2} = \frac{\sqrt{2}\pi R}{2v_0}$$

粒子横向运动近似为匀速圆周运动,角速度近似为

$$\omega = \frac{v_\theta}{r} \approx \frac{v_0}{R}$$

可知 P 点的方位角即粒子横向转过的角度为

$$\theta = \angle AOP = \omega t \approx \frac{v_0 t}{R} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi \approx 127^\circ$$

因此,对于很小的 β 角,粒子束可在 P 点准确聚焦,该位置与 β 无关。

点评: 只有求出径向简谐运动的周期,才能求出横向运动的路程所对的圆心角。为了求径向运动周期,关键是选择转动参考系,推导质点受到径向回复力的关系式,利用近似计算公式求出等效劲度系数。径向运动具有对称性,属于简谐运动的一部分,相继两次经过径向运动平衡位置的时间恰好等于半个周期。

方法 2: 利用有效势能求周期^[4]

粒子只受径向电场力的作用,对 O 点的力矩为零,因此粒子在运动过程中角动量守恒,即

$$L = mv_0 R \cos \beta \approx mv_0 R$$

在非匀速转动参考系中,以无穷远处为势能零点,可知有效势能为 $U_{\text{eff}} = \frac{L^2}{2mr^2} + E_p$, 其中电势能为

$$E_p = -qU = -qk \ln \frac{b}{r}, \text{ 则有效势能为}$$

$$U_{\text{eff}} = \frac{mR^2 v_0^2}{2r^2} - qk \ln \frac{b}{r}$$

关于矢径的一阶导数为

$$\frac{dU_{\text{eff}}}{dr} = -\frac{mR^2 v_0^2}{r^3} + \frac{qk}{r}$$

令 $\frac{dU_{\text{eff}}}{dr} = 0$, 得 $r = R$, 这正是圆周运动的轨道,

表明此处是径向平衡位置。

由于粒子的入射方向与半圆轨道的切线偏离一

个很小的角度 β , 则粒子在 $r = R$ 附近做简谐运动。

有效势能关于矢径的二阶导数为

$$\frac{d^2 U_{\text{eff}}}{dr^2} = 3 \frac{mR^2 v_0^2}{r^4} - \frac{qk}{r^2}$$

在 $r = R$ 处, 有效势能关于矢径的二阶导数为等

效劲度系数, 利用 $\frac{kq}{R} = m \frac{v_0^2}{R}$ 可得 $k' = \frac{2mv_0^2}{R^2} > 0$, 表

明带电粒子在 $r = R$ 轨道上处于稳定平衡状态。

点评: 由于其他粒子的入射方向与半圆轨道的切线偏离一个很小的角度 β , 则粒子运动轨迹将偏离半圆轨道, 那么曲线运动不是匀速转动, 角速度将发生变化, 但由于粒子只受到有心力的作用, 则角动量守恒, 因此可利用有效势能公式进行解答, 但前提是径向运动为简谐运动, 即满足 $x \ll R$, 这样, 对有效势能的一阶导数才能化简为线性力的形式。

【例 2】 在真空中有两个质点的质量分别为 m 和 M , 带电荷量分别为 $+q_1$ 和 $-q_2$, 开始相距为 l , 其中质点 M 的初速度为零, 质点 m 的初速度大小为 v , 方向垂直于二者的连线, 已知两个质点的距离存在最小值, 不计万有引力, 求: (1) 它们在以后运动过程中距离的最小值; (2) 质点 m 相对于 M 运动的周期。

解法 1: 利用等效势能和机械能守恒定律

(1) 开始时质点 M 的加速度大小为 $a_M = k \frac{q_1 q_2}{Ml^2}$,

方向由质点 M 指向 m 。若以质点 M 为参考系, 则质点 m 受到惯性力的大小为 $F' = ma_M$, 方向由质点 m 指向 M , 与电场力方向相同。设某时刻二者的距离为 r , 则质点 m 受到的合力的大小为

$$F_m = k \frac{q_1 q_2}{r^2} + ma_M = \left(1 + \frac{m}{M}\right) k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

方向由质点 m 指向 M 。

由此可见, 质点 m 受到有心力的作用, 由于初速度方向与作用力方向垂直, 而且两个质点的距离存在最小值, 因此, 质点 m 相对于质点 M 做椭圆运动。由于有心力为平方反比力, 则力心位于椭圆轨道的一个焦点, 取无穷远处的电势能为零, 设椭圆的半长轴为 a , 与卫星的机械能总量表达式进行类比, 可知质点 m 在椭圆轨道上运动的总能量为

$$E = -\left(1 + \frac{m}{M}\right) k \frac{q_1 q_2}{2a}$$

开始时, 质点 m 的动能为 $E_k = \frac{1}{2} mv^2$, 等效电势

能为

$$E_p = -\left(1 + \frac{m}{M}\right)k \frac{q_1 q_2}{l}$$

由能量守恒定律可知

$$-\left(1 + \frac{m}{M}\right)k \frac{q_1 q_2}{2a} = \frac{1}{2}mv^2 - \left(1 + \frac{m}{M}\right)k \frac{q_1 q_2}{l}$$

由此得

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{l} - \frac{Mmv^2}{(M+m)kq_1 q_2 l}$$

已知最大距离为 $r_1 = l$, 可知最小距离为

$$r_2 = 2a - r_1 = \frac{2(M+m)kq_1 q_2 l}{2(M+m)kq_1 q_2 - Mmv^2 l} - l = \frac{Mmv^2 l^2}{2(M+m)kq_1 q_2 - Mmv^2 l}$$

(2) 由开普勒第三定律可知, 椭圆运动的周期等于以半长轴为半径的匀速圆周运动的周期, 则有

$$F = \left(1 + \frac{m}{M}\right)k \frac{q_1 q_2}{a^2} = ma\omega^2$$

若令 $m' = \frac{Mm}{M+m}$, 则半长轴

$$a = \frac{kq_1 q_2 l}{2kq_1 q_2 - m'v^2 l}$$

可知

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{Mma^3}{(M+m)kq_1 q_2} = \frac{(2\pi kq_1 q_2)^2 m' l^3}{(2kq_1 q_2 - m'v^2 l)^3}$$

由此得

$$T = 2\pi kq_1 q_2 \sqrt{\frac{m' l^3}{(2kq_1 q_2 - m'v^2 l)^3}}$$

即

$$T = 2\pi kq_1 q_2 \sqrt{\frac{(M+m)^2 Mml^3}{[2kq_1 q_2 (M+m) - Mmv^2 l]^3}}$$

点评: 在应用能量守恒定律列方程时, 利用了椭圆运动的总能量公式, 这样可省略角动量守恒方程。值得注意的是, 卫星做椭圆运动的机械能总量公式成立的条件是中心天体的质量比环绕天体的质量大得多, 即只有在卫星的质量比地球的质量小得多的条件下, 才可认为地球固定不动。但对于题中的两个带电质点而言, 没有给出质量相差悬殊的条件, 若认为其中一个固定不动, 则需对另一个质点添加惯性力。

解法 2: 利用径向有效势能的极值条件

(1) 若以质点 M 为参考系, 即认为其固定不动, 则质点 m 的折合质量为 $m' = \frac{Mm}{M+m}$ 。在非匀速转动

参考系中, 若以无穷远处为势能零点, 则径向有效势能为 $U_{\text{eff}} = \frac{L^2}{2m'r^2} - k \frac{q_1 q_2}{r}$ 。当质点 m 的径向动能为零时, 有效势能取最大值, 等于总能量, 即

$$\frac{L^2}{2m'r^2} - k \frac{q_1 q_2}{r} = \frac{1}{2}m'v^2 - k \frac{q_1 q_2}{l}$$

刚开始运动时, 质点的相对初速度方向与矢径垂直, 由于质点相对运动的角动量守恒, 可知

$$L = m'vl$$

考虑到椭圆运动的总能量小于零, 可得关于 r 的方程

$$\left(k \frac{q_1 q_2}{l} - \frac{1}{2}m'v^2\right)r^2 - kq_1 q_2 r + \frac{m'v^2 l^2}{2} = 0$$

利用一元二次方程的求根公式可知

$$r = l \frac{kq_1 q_2 \pm \sqrt{k^2 q_1^2 q_2^2 - 2kq_1 q_2 m'v^2 l + m'^2 v^4 l^2}}{2kq_1 q_2 - m'v^2 l} = l \frac{kq_1 q_2 \pm (kq_1 q_2 - m'v^2 l)}{2kq_1 q_2 - m'v^2 l}$$

由此得距离的最大值为 $r_1 = l$, 最小值为

$$r_2 = \frac{m'v^2 l^2}{2kq_1 q_2 - m'v^2 l} = \frac{Mmv^2 l^2}{2(M+m)kq_1 q_2 - Mmv^2 l}$$

(2) 质点 m 相对于力心的矢径扫动的面积速率为

为 $S' = \frac{L}{2m'} = \frac{1}{2}vl$, 而椭圆的面积为 $S = \pi ab$, 可知质

点沿椭圆运动的周期为 $T = \frac{S}{S'} = 2\pi \frac{ab}{vl}$ 。其中

$$b^2 = r_1 r_2 = \frac{m'v^2 l^3}{2kq_1 q_2 - m'v^2 l}$$

下面求半长轴 a , 对系统由能量守恒定律有

$$-k \frac{q_1 q_2}{2a} = \frac{1}{2}m'v^2 - k \frac{q_1 q_2}{l}$$

可得

$$a = \frac{kq_1 q_2 l}{2kq_1 q_2 - m'v^2 l}$$

可知椭圆运动的周期为

$$T = 2\pi kq_1 q_2 \sqrt{\frac{(M+m)^2 Mml^3}{[2kq_1 q_2 (M+m) - Mmv^2 l]^3}} \quad (1)$$

点评: 在解法 1 中, 由于考虑到惯性力, 因此在列方程时都不必考虑折合质量; 在解法 2 中, 由于不考虑惯性力, 因此在列方程时都需考虑折合质量。在解法 2 中, 对于第(1)问, 关键是利用径向运动转折点的特点列方程, 结合动量守恒方程得到关于 r 的一元二次方程, 可求得质点到力心距离的极值。此外, 一元二次方程的两个根分别为两个质点之间距

离的最大值和最小值,可知二者之和等于椭圆的长轴,即 $2a = -\frac{B}{A} = \frac{2kq_1q_2l}{2kq_1q_2 - m'v^2l}$,由此得 a 的关系式与解法1中所得结果相同;还可求出方程的两个根之积为

$$r_1r_2 = \frac{C}{A} = \frac{m'v^2l^3}{2kq_1q_2 - m'v^2l}$$

已知两个质点的最大距离为 $r_1 = l$,则可直接得到最小距离 r_2 .

对于第(2)问求周期,不能利用对有效势能取导数的方法,因为径向运动不是简谐运动.或者说,若对有效势能取导数为

$$U'_{\text{eff}} = -\frac{L^2}{m'r^3} + k\frac{q_1q_2}{r^2}$$

则由 $U'_{\text{eff}} = 0$ 可得平衡点为

$$r_0 = \frac{m'v^2l^2}{kq_1q_2}$$

但由于在椭圆运动过程中偏离平衡点的径向位移 x 较大,不可能满足 $x \ll r_0$,那么对有效势能的一阶导数不可能化简为线性力的形式,因此对有效势能取二阶导数在径向平衡点的数值 $k' = \frac{k^4q_1^4q_2^4}{m'^3v^6l^6}$ 不是等效劲度系数,不能用来计算周期.如果不顾结论的适用条件而盲目地套用公式,即利用

$$k' = \frac{k^4q_1^4q_2^4}{m'^3v^6l^6}$$

来计算周期,则可得

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m'}{k'}} = \frac{2\pi m'^2v^3l^3}{k^2q_1^2q_2^2} =$$

$$\frac{2\pi M^2m^2v^3l^3}{k^2q_1^2q_2^2(M+m)^2} \quad (2)$$

显然,式(2)与式(1)不相同.若令两式相等,则可推出 $kq_1q_2 = m'v^2l$,那么此时机械能总量为

$$E = \frac{1}{2}m'v^2 - m'v^2 = -\frac{1}{2}m'v^2$$

这表明,机械能总量等于动能的负值,只有在平方反比力作用下的匀速圆周运动才满足这个关系,而对于平方反比力作用下的椭圆运动,不可能满足这个关系,则式(2)不成立,是一个错误的结果.因此,要注意特殊结论和方法的适用条件,只有简谐运动系统,或者说径向运动是简谐运动,才能利用有效势能取二阶导数的方法来求等效劲度系数以及径向运动的周期.

综上所述,在有心力作用下的径向“有效势能”具有一系列特殊的性质,对于质点在有心力作用下的某些曲线运动问题,除了一般的解法,有时还可利用有效势能的性质进行解答,不仅拓展了解题思路和方法,还可化繁为简,显得巧妙快捷.

参考文献

- 1 胡少希,孙伟.有效势能在高中物理竞赛中的应用[J].物理教师,2020,41(5):95~96
- 2 王化银,陈忆箫.有效势能应用二则[J].物理教师,2016,37(4):89~90
- 3 孙伟.谈高中物理竞赛中简谐振动的两种处理[J].物理教学,2020,42(11):62~65
- 4 涂德新.多角度处理一道电聚焦问题[J].物理教师,2019,40(11):55~56

Properties and Applications on Radial *Effective Potential Energy*

Zheng Jin

(Lingyuan Vocational Education Center, Chaoyang, Liaoning 122500)

Abstract: Deduces the expression of the total energy of a particle in the polar coordinate system under the action of central force, lead to the formula of the effective potential energy of the particle in the rotating reference system, obtains the value range and extreme condition of the effective potential energy, points out the physical significance of the second-order derivative of the effective potential energy about the vector diameter at the equilibrium point, and skillfully solves two physics contest questions by using the properties of the effective potential energy.

Key words: central force; effective potential energy; value range; extremum condition; equivalent stiffness coefficient