



基于高观点的等距双棒模型研究*

唐武建 高忠贵 张妙静

(广西师范大学物理科学与技术学院 广西 桂林 541004)

(收稿日期:2022-01-04)

摘要:电磁感应中的导轨/双棒复合结构涉及力、运动及电学等知识,是一类典型的综合性问题,对改善学生的物理思维具有重要意义.将具有恒力作用和初速度两类典例中的双棒依据其受力情况分为主动棒和从动棒,利用牛顿运动定律、电磁感应及电路原理从高观点的角度剖析双棒速度、加速度及回路感应电动势、感应电流随时间的变化规律,分别获得收尾加速度和收尾速度稳态解.模型及方程构建、求解等过程研究有助于学生加强对基本原理的认知,提高物理学科核心素养.

关键词:复合结构 稳态解 过程研究 核心素养

电磁感应中的导轨/双棒复合结构(简称:双棒模型)是一类典型的电学与动力学相结合的综合性问题^[1,2].在此类问题中,双棒在磁场中切割磁感线的同时受到安培力的作用,致使对受力情况、运动规律、电路特征等的分析变得极为复杂.而深度掌握每一个状态的细节及相邻状态的关联性,是解决此类问题的有效途径^[3].本文分别以具有恒力作用和初速度两类常见的双棒模型为研究对象,通过构建、求解双棒的运动微分方程,结合图表,可视化探索其运动和电学特性,以期获得双棒模型的一般规律,为解决复杂问题提供参考.

1 恒力作用下的无初速等距双棒模型

如图1所示,质量为 m_1 的导体棒1和质量为 m_2 的导体棒2静止在足够长的光滑平行导轨上,导轨宽度为 L ,固定在绝缘水平面上,整个区域分布着垂直于导轨平面向上且磁感应强度为 B 的匀强磁场,整个回路的电阻始终为 R ,两棒始终与导轨保持垂直且良好接触.现有与导轨平行且向右的恒力 F_1 和 F_2 分别作用于棒1和棒2上.试分析模型的运动特征及电学特性变化趋势.

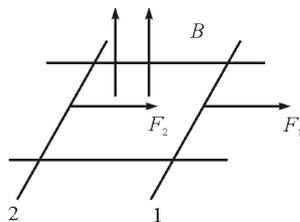


图1 恒力作用下的无初速等距双棒模型

1.1 建模求解

双棒未运动时,不受安培力作用,速度只受初始加速度 $\frac{F_x}{m_x}$ 影响.系统稳定前,若 $\frac{F_1}{m_1} > \frac{F_2}{m_2}$,回路磁通量增加方向与原磁场相同,据楞次定律可知,感应电流方向为顺时针方向,据左手定则,导体棒1和导体棒2所受安培力方向分别为水平向左、水平向右;若 $\frac{F_1}{m_1} < \frac{F_2}{m_2}$,同理可知,导体棒1和导体棒2所受安培力方向分别为水平向右、水平向左.

因此,系统稳定前,双棒所受的安培力方向只与初始加速度大小关系有关,与位置无关.设初始加速度大的导体棒为主动棒,主动棒受恒力 $F_{主}$ 作用,受到的安培力与 $F_{主}$ 方向相反,质量为 $m_{主}$,速度为 $v_{主}$;初始加速度小的导体棒为从动棒,从动棒受恒力 $F_{从}$ 作用,受到的安培力与 $F_{从}$ 方向相同,质量为

* 广西普通高级中学考选择性考试物理试题情境素材库的建立与样卷开发,项目编号:2020ZJY186

作者简介:唐武建(1998-),男,在读硕士研究生,研究方向为中学物理教学.

通讯作者:高忠贵(1973-),男,博士,讲师,主要从事物理学科教学和纳米能源与光电子器件物理研究.

$m_{从}$, 速度为 $v_{从}$, 则回路中感应电动势和感应电流为

$$E = BL(v_{主} - v_{从}) \quad (1)$$

$$I = \frac{E}{R} = \frac{BL(v_{主} - v_{从})}{R} \quad (2)$$

双棒受到的安培力大小为

$$F_{安} = BIL = \frac{B^2 L^2 (v_{主} - v_{从})}{R} \quad (3)$$

双棒运动微分方程为

$$F_{主} - \frac{B^2 L^2 (v_{主} - v_{从})}{R} = m_{主} \frac{dv_{主}}{dt} \quad (4)$$

$$F_{从} + \frac{B^2 L^2 (v_{主} - v_{从})}{R} = m_{从} \frac{dv_{从}}{dt} \quad (5)$$

由动量定理得

$$F_{主} t + F_{从} t = m_{主} v_{主} + m_{从} v_{从} \quad (6)$$

联立式(4)、(5)、(6)得

$$v_{主} = \frac{F_{主} + F_{从} t}{m_{主} + m_{从}} +$$

$$\frac{R m_{从} (m_{从} F_{主} - m_{主} F_{从})}{B^2 L^2 (m_{主} + m_{从})^2} \left[1 - e^{-\frac{B^2 L^2 (m_{主} + m_{从})}{R m_{主} m_{从}} t} \right] \quad (7)$$

$$v_{从} = \frac{F_{主} + F_{从} t}{m_{主} + m_{从}} -$$

$$\frac{R m_{主} (m_{从} F_{主} - m_{主} F_{从})}{B^2 L^2 (m_{主} + m_{从})^2} \left[1 - e^{-\frac{B^2 L^2 (m_{主} + m_{从})}{R m_{主} m_{从}} t} \right] \quad (8)$$

由 $a = \frac{dv}{dt}$

得 $a_{主} = \frac{dv_{主}}{dt} = \frac{F_{主} + F_{从}}{m_{主} + m_{从}} +$

$$\frac{m_{从} F_{主} - m_{主} F_{从}}{(m_{主} + m_{从}) m_{主}} e^{-\frac{B^2 L^2 (m_{主} + m_{从})}{R m_{主} m_{从}} t} \quad (9)$$

$$a_{从} = \frac{dv_{从}}{dt} = \frac{F_{主} + F_{从}}{m_{主} + m_{从}} -$$

$$\frac{m_{从} F_{主} - m_{主} F_{从}}{(m_{主} + m_{从}) m_{从}} e^{-\frac{B^2 L^2 (m_{主} + m_{从})}{R m_{主} m_{从}} t} \quad (10)$$

1.2 结果与讨论

下面图2和图3分别给出了双棒速度、加速度的变化曲线. 由图可知, 随时间增加, 双棒的速度趋于线性变化, 但存在一个差值

$$\Delta v = \frac{R(m_{从} F_{主} - m_{主} F_{从})}{B^2 L^2 (m_{主} + m_{从})}$$

这导致回路面积的变化率恒定, 从而在闭合回路中

产生一个恒定的感应电动势, 但单棒内的感应电动势却越来越大. 双棒加速度则随时间增加而趋于一致, 即

$$a = \frac{F_{主} + F_{从}}{m_{主} + m_{从}}$$

收尾加速度大小只与双棒质量和所受到的作用力有关, 磁感应强度、导轨间距、回路电阻对双棒达到收尾加速度所需的时间有影响, 时间常数

$$\tau = \frac{R m_{主} m_{从}}{B^2 L^2 (m_{主} + m_{从})}$$

指数函数 $e^{-\frac{t}{\tau}}$ 随时间衰减的情况如表1所示. 一般可认为 $t = 6\tau$ 时 $e^{-\frac{t}{\tau}}$ 约等于零, 此时系统达到稳态, 下同.

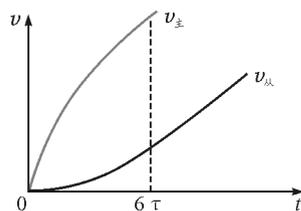


图2 双棒速度随时间变化曲线

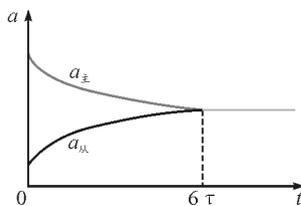


图3 双棒加速度随时间变化曲线

表1 以时间常数倍数计的各时刻 $e^{-\frac{t}{\tau}}$ 值

τ	2τ	3τ	4τ	5τ	6τ
e^{-1}	e^{-2}	e^{-3}	e^{-4}	e^{-5}	e^{-6}
0.368	0.135	0.049 8	0.018 3	0.006 74	0.002 48

回路中感应电动势和感应电流的表达式见下面式(11)和(12), 图4和图5分别给出了它们随时间的变化曲线, 由图可知, 感应电动势和感应电流都随时间的增加趋于一个定值, 这与速度-时间图像所体现的回路面积变化率趋于恒定这一物理现象相吻合.

$$E = \frac{R(m_{从} F_{主} - m_{主} F_{从})}{BL(m_{主} + m_{从})} \cdot \left[1 - e^{-\frac{B^2 L^2 (m_{主} + m_{从})}{R m_{主} m_{从}} t} \right] \quad (11)$$

$$I = \frac{m_{从} F_{主} - m_{主} F_{从}}{BL(m_{主} + m_{从})} \left[1 - e^{-\frac{B^2 L^2 (m_{主} + m_{从})}{R m_{主} m_{从}} t} \right] \quad (12)$$

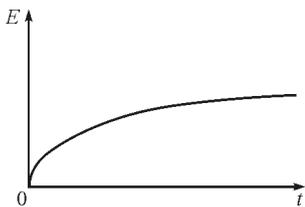


图 4 感应电动势随时间变化曲线

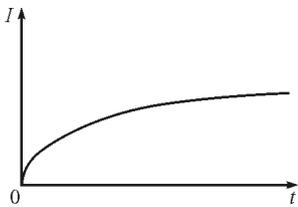


图 5 感应电流随时间变化曲线

2 只有初速度的等距双棒模型

如图 6 所示,如果在“恒力作用下的无初速等距双棒模型”中,撤除双棒所受的恒力,并假定棒 1 和棒 2 分别以平行于导轨水平向右的初速度 v_{01} 和 v_{02} 运动,其余条件保持不变.试分析模型的运动特征及电学特性变化趋势.

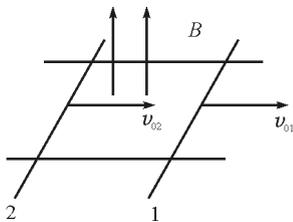


图 6 只有初速度的等距双棒模型

2.1 建模求解

与“恒力作用下的无初速等距双棒模型”的分析类似,设初速度大的导体棒为主动棒,质量为 $m_{主}$,初速度为 $v_{0主}$,速度为 $v_{主}$,受到的安培力与运动方向相反;初速度小的导体棒为从动棒,质量为 $m_{从}$,初速度为 $v_{0从}$,速度为 $v_{从}$,受到的安培力与运动方向相同.则有

$$v_{主} = \frac{m_{从}}{m_{主} + m_{从}}(v_{0主} - v_{0从}) \cdot e^{-\frac{(m_{主} + m_{从})B^2 L^2}{m_{主} m_{从} R} t} + \frac{m_{主} v_{0主} + m_{从} v_{0从}}{m_{主} + m_{从}} \quad (13)$$

$$v_{从} = -\frac{m_{主}}{m_{主} + m_{从}}(v_{0主} - v_{0从}) \cdot e^{-\frac{(m_{主} + m_{从})B^2 L^2}{m_{主} m_{从} R} t} + \frac{m_{主} v_{0主} + m_{从} v_{0从}}{m_{主} + m_{从}} \quad (14)$$

$$a_{主} = \frac{dv_{主}}{dt} = -\frac{B^2 L^2}{m_{主} R}(v_{0主} - v_{0从}) e^{-\frac{(m_{主} + m_{从})B^2 L^2}{m_{主} m_{从} R} t} \quad (15)$$

$$a_{从} = \frac{dv_{从}}{dt} = \frac{B^2 L^2}{m_{从} R}(v_{0主} - v_{0从}) e^{-\frac{(m_{主} + m_{从})B^2 L^2}{m_{主} m_{从} R} t} \quad (16)$$

$$E = BL(v_{0主} - v_{0从}) e^{-\frac{(m_{主} + m_{从})B^2 L^2}{m_{主} m_{从} R} t} \quad (17)$$

$$I = \frac{BL}{R}(v_{0主} - v_{0从}) e^{-\frac{(m_{主} + m_{从})B^2 L^2}{m_{主} m_{从} R} t} \quad (18)$$

2.2 结果与讨论

下面图 7 和图 8 给出了双棒速度和加速度的变化曲线,由图可知,双棒的速度随时间增加而趋于一个定值,即

$$v = \frac{m_{主} v_{0主} + m_{从} v_{0从}}{m_{主} + m_{从}}$$

收尾速度的大小只与双棒质量和初速度有关.磁感应强度、导轨间距、回路电阻影响双棒达到收尾速度所需的时间,时间常数为 τ ,与上同.暂态过程,系统机械能的损失量为一定值

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} m_{主} v_{0主}^2 + \frac{1}{2} m_{从} v_{0从}^2 - \frac{1}{2} (m_{主} + m_{从}) v^2$$

与电阻无关.双棒加速度则随时间的增加而趋于零.

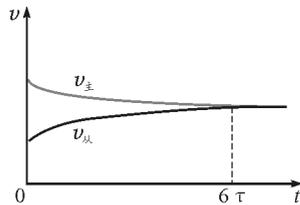


图 7 双棒速度随时间变化曲线

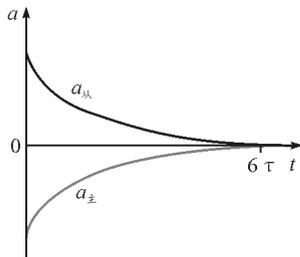


图 8 双棒加速度随时间变化曲线

图 9 和图 10 给出了回路中感应电动势和感应电流的变化曲线,由图可知,它们都随时间增加而趋于零,流过回路的总电量

$$q = \int_0^{\infty} Idt$$

$$q = \frac{m_{\text{主}} m_{\text{从}} (v_{0\text{主}} - v_{0\text{从}})}{BL(m_{\text{主}} + m_{\text{从}})} (1 - e^{-\frac{\xi}{\tau}})$$

与电阻无关,电阻产生的焦耳热

$$Q = \int_0^{\xi} I^2 R dt = \frac{m_{\text{主}} m_{\text{从}} (v_{0\text{主}} - v_{0\text{从}})^2}{2(m_{\text{主}} + m_{\text{从}})} (1 - e^{-\frac{2\xi}{\tau}})$$

可推算当 $\xi \rightarrow \infty$ 时, $Q = \Delta E_k$, 也即系统损失的机械能转化成了电阻的热能,但大小不受电阻影响。

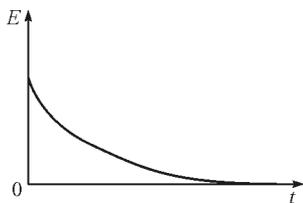


图9 感应电动势随时间变化曲线

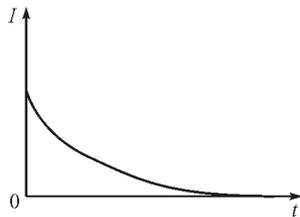


图10 感应电流随时间变化曲线

3 模型特性

我们依据指数函数 $e^{-\frac{t}{\tau}}$ 是否约为零将模型所处的状态分为暂态和稳态,不等于零为暂态,等于零则为稳态.两类模型主要的运动特征和电学特性总结如表2所示。

表2 两类模型的运动特征及电学特性

模型种类	状态	运动特征	电学特性
恒力作用下的无初速等距双棒模型	暂态	主动棒做加速度减小的加速运动,从动棒做加速度增大的加速运动	回路中的电流和电压随时间的增大而增大,并且增大的速度越来越小
	稳态	双棒做加速度相等的匀加速运动	回路中的电流和电压恒定
只有初速度的等距双棒模型	暂态	主动棒做加速度减小的减速运动,从动棒做加速度减小的加速运动	回路中的电流和电压随时间的增大而减小,并且减小的速度越来越小
	稳态	双棒做速度相等的匀速运动	回路中的电流和电压恒为零

可见,不论是否有外力作用,都可将安培力看作系统的内力,而将双棒看作“广义”上的整体,再应用牛顿运动定律和动量定理分别求得加速度和速度的稳态解.在“只有初速度的等距双棒模型”中,限流及耗能元件 R 对暂态过程流过回路的总电量以及系统损失的机械能不产生影响,这有悖于中学生对电阻的认知,值得深思。

4 结束语

本文从高观点的角度分别对电磁感应中“只具有恒力作用”和“只有初速度”两类双棒模型进行了较为详细的探索.结果表明:对于前者,双棒加速度中一个逐渐增加而另一个逐渐减小,最后趋于相同的收尾加速度 a ;对于后者,双棒速度则趋于相同的收尾速度 v ;磁感应强度、导轨间距、电阻与双棒质量构成时间常数 τ ,该常数决定了模型从暂态到稳态过渡的时长.在“只有初速度”的模型中,与限流和能耗相关的参数 R 对暂态过程系统损失的机械能

及回路中通过的总电量不产生影响,基于这一点,可将问题拓展至不忽略导轨电阻的更贴近实际的模型.双棒模型涉及面广,求解时容易错漏,加强对基本原理的应用和数学建模能力^[3~5],是正确求解此类问题的关键。

参考文献

- 肖云剑. 电磁感应之“双棒模型”[J]. 湖南中学物理, 2019, 34(12): 88 ~ 90
- 滕文静. 电磁感应中的“单双杆问题”浅析[J]. 中学物理教学参考, 2020, 49(15): 63 ~ 64
- 何彦雨, 李富恩, 陈菁. 以“不变”应“万变”——2020年全国I卷的两道动态类题[J]. 物理教师, 2021, 42(1): 78 ~ 80
- 李博, 皮继鑫, 邹思嘉, 等. 高观点下习题分析培养数理思想探讨——以微分方程解决高中物理问题为例[J]. 理科考试研究, 2020, 27(21): 42 ~ 45
- 张永刚, 朱巧萍. 高中生物理建模意识和能力的培养策略研究[J]. 物理教师, 2021, 42(6): 2 ~ 4, 9