

论杆物绳系的动力学与能量问题

周定河
(常德市第一中学 湖南 常德 415000)
(收稿日期:2022-02-06)

摘 要:针对以杆物绳系为背景命制的部分习题答案中出现的错误,通过对物体速度约束条件的讨论,得出了物体加速度的具体关系,修正了杆物绳系中两物体加速度同时为零的错误结论.从机械能守恒入手,得出物体速度的表达式,用 GeoGebra 软件作出 $v^2-\theta$ 图像,直观清晰地呈现了物体运动的细节.

关键词:杆物绳系 动力学 能量 GeoGebra 软件

以杆物绳系统为背景的习题在各种资料上出现的频率较高,习题设计一般针对物体的动力学分析和能量问题讨论,但有些题目给出的答案往往出现失误.因此,有必要对这类问题深入研究.下面结合几个例题从动力学分析和能量转换两个侧面对杆物绳系统深度分析^[1],以期避免同样的失误.

【例 1】如图 1 所示,物块套在固定竖直杆上,用轻绳连接后跨过定滑轮与小球相连.开始时物块与定滑轮等高.已知物块的质量 $m_1=3\text{ kg}$,球的质量 $m_2=5\text{ kg}$,杆与滑轮间的距离 $d=2\text{ m}$,重力加速度 $g=10\text{ m/s}^2$,轻绳和杆足够长,不计一切摩擦,不计空气阻力.现将物块由静止释放,在物块向下运动的过程中()

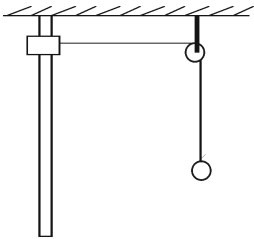


图 1 杆物绳系初态

- A. 物块运动的最大速度为 $\frac{5\sqrt{3}}{3}\text{ m/s}$
- B. 小球运动的最大速度为 $\frac{3\sqrt{3}}{5}\text{ m/s}$
- C. 物块下降的最大距离为 3 m
- D. 小球上升的最大距离为 2.25 m

原解:当物块所受的合外力为零时,物块运动的

速度最大,此时,小球所受合外力也为零,则有绳的张力为小球的重力,即

$$F_T=m_2g=50\text{ N}\tag{1}$$

对物块作受力分析,如图 2 所示,可知

$$F_T\cos\theta=m_1g\tag{2}$$

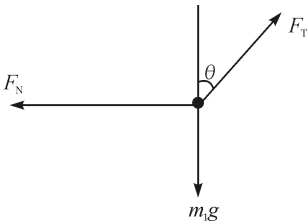


图 2 物块受力分析

对物块速度 v 沿绳子的方向和垂直绳的方向分解,则沿绳方向的分速度即为小球的速度,设为 v_1 ,则有

$$v_1=v\cos\theta\tag{3}$$

对物块和小球组成的系统,由机械能守恒定律可知

$$m_1g\frac{d}{\tan\theta}=m_2g\left(\frac{d}{\sin\theta}-d\right)+\frac{1}{2}m_1v^2+\frac{1}{2}m_2v_1^2\tag{4}$$

代入数据,得

$$v=\frac{5\sqrt{3}}{3}\text{ m/s}\quad v_1=\sqrt{3}\text{ m/s}\tag{5}$$

故 A 正确,B 错误.

设物块下落的最大高度为 h ,此时小球上升的最大距离为 h_1 ,则有

$$h_1 = \sqrt{h^2 + d^2} - d \tag{6}$$

对物块和小球组成的系统,由机械能守恒定律可得

$$m_1gh = m_2gh_1 \tag{7}$$

联立解得

$$h = 3.75\text{ m} \quad h_1 = 2.25\text{ m} \tag{8}$$

故 C 错误,D 正确. 选 A,D.

原题给出的答案中,选项 A 是错误的. 该解答的失误在于没有对球进行正确的动力学分析. 讨论如下.

1 物体加速度的研究

在例 1 中,释放物块时物块的合力为竖直向下的 m_1g ,则物块下滑全程必先向下做加速度减小的加速运动,后做加速度增大的减速运动,其加速度为零时速度最大.

设绳与杆成 θ 角时物块的速度为 v 、加速度大小为 a ,小球的加速度大小为 a_1 . 将 v 沿绳和垂直绳的方向分解,如图 3 所示. 沿绳方向的分速度大小 v_1 就是小球的速度大小,有

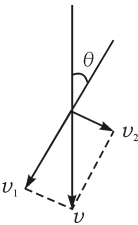


图 3 物块速度分解

$$v_1 = v\cos\theta \tag{9}$$

两边求导,得

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{dv}{dt}\cos\theta - v\sin\theta \cdot \frac{d\theta}{dt} \tag{10}$$

其中, $\frac{dv_1}{dt} = a_1$, $\frac{dv}{dt} = a$, $\frac{d\theta}{dt}$ 为绳子相对杆偏转的角速度大小.

由于物块加速度 $a = \frac{dv}{dt}$ 为零时速度最大,物块要继续下行,绳对杆仍有偏转, $\frac{d\theta}{dt} \neq 0$. 因此,当物块速度最大,也就是物块加速度为零时,有

$$a_1 = -v\sin\theta \cdot \frac{d\theta}{dt} \neq 0 \tag{11}$$

可见,物块加速度为零时,小球的加速度必不为零.

这是杆物绳系统中物体加速度问题的关键,也是特别容易出现错误的地方. 而原解答则认为两球的加速度同时为零,从而得出选项 A 对的错误结论.

2 物系能量的研究

在例 1 中,对杆物绳系统的能量研究,可以得到物块运动的最大速度.

设绳与杆成 θ 时物块的速度大小为 v . 对物块和小球组成的系统,由机械能守恒定律,有

$$m_1g \frac{d}{\tan\theta} = m_2g\left(\frac{d}{\sin\theta} - d\right) + \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2(v\cos\theta)^2 \tag{12}$$

代入数据化简,得

$$v^2 = \frac{120\cos\theta + 200\sin\theta - 200}{(3 + 5\cos^2\theta)\sin\theta} \tag{13}$$

直接解该方程求 v 难度可想而知,几乎得不出结果. 在网上觅得一款门槛极低的 GeoGebra 动态数学作图软件,可以轻松作出 $v^2 - \theta$ 图像,从而解出 v_m . 用 GeoGebra 绘出的式(13) 的图像如图 4 所示. 可得, $v_m = 3.91\text{ m/s}$,对应的 θ 约为 59.6° .

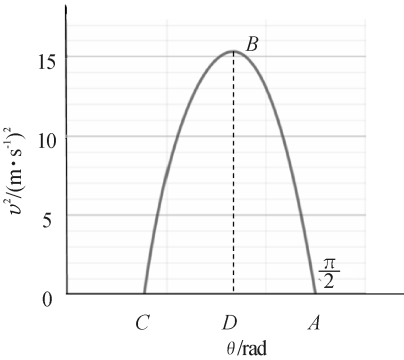


图 4 用 GeoGebra 绘出的式(13) 的 $v^2 - \theta$ 图像

在图 4 中的 C 点, θ 约为 28.0° ,由几何关系有

$$h = \frac{d}{\tan\theta} = \frac{2}{\tan 28.0^\circ} = 3.76\text{ m} \tag{14}$$

与直接解得的结果 3.75 m 非常接近. 说明上述结果是可信的.

与该题相似的是 1995 年上海市第九届高一物理竞赛复赛第 23 题,原题如下.

【例 2】如图 5 所示,细线的一端与套在光滑细杆 MN 上的滑块 A 相连,另一端通过不计大小的定滑轮 O 将物体 B 悬挂在空中,细杆 MN 与水平面成 60° 角,杆上 P 点与滑轮 O 处在同一水平面上,P 到 O 点的距离为 $s = 1\text{ m}$,滑块 A 的质量为 $5m$,物体 B

的质量为 m , 滑块 A 在 P 点由静止开始沿杆下滑。

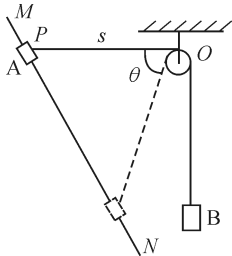


图 5 杆物绳系初态

- (1) 当 OP 绳转过角度 $\theta = 60^\circ$ 时, 滑块 A 的速度多大?
- (2) 求滑块 A 下滑的最大速度.

参考解答给出滑块 A 的最大速度为 $\sqrt{\frac{8}{7}}$ m/s, 也出现了类似问题. 宋辉武等已作过相应的讨论^[2], 得到滑块速度的表达式, 若取 $g = 10$ m/s², 则为

$$v^2 = \frac{30\cos\theta + 10(4 + \sqrt{3})\sin\theta - 20\sqrt{3}}{2(1 + \cos^2\theta)\sin\theta} \quad (15)$$

他们利用 MATLAB 软件作出式(15) 的 $v^2 - \theta$ 图像如图 6 所示, A 点表示滑块下滑到最大距离处, 此时 θ 约为 4.75° , B 点表示滑块的速度达到最大, 约为 3.75 m/s, 此时 θ 约为 68.21° .

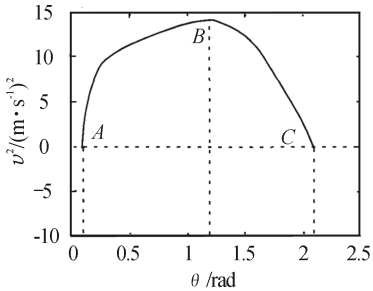


图 6 用 MATLAB 软件作出的式(15) 的 $v^2 - \theta$ 图

笔者用 GeoGebra 绘出式(17) 的图像如图 7 所示. 滑块下滑到最大距离处 θ 约为 4.71° , 滑块速度最大时, θ 约为 68.1° . 此结果与用 MATLAB 软件作出的 $v_m^2 - \theta$ 图像对应的结果一致性很好.

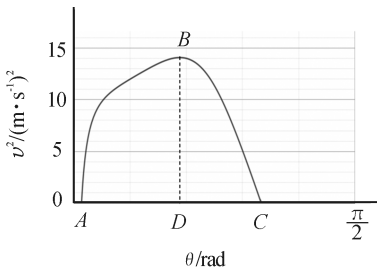


图 7 用 GeoGebra 绘出的式(15) 的 $v^2 - \theta$ 图像

针对例 1, 由机械能守恒定律可得到小球的速度大小满足

$$v_1^2 = \frac{120\cos\theta + 200\sin\theta - 200}{\left(5 + \frac{3}{\cos^2\theta}\sin\theta\right)} \quad (16)$$

用 GeoGebra 绘出式(16) 的 $v_1^2 - \theta$ 图像如图 8 所示. 得小球最大速度为 1.79 m/s, 对应 θ 约为 45.0° .

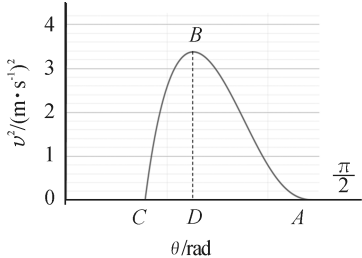


图 8 用 GeoGebra 绘出的式(16) 的 $v_1^2 - \theta$ 图像

3 绳上弹力的研究

在例 1 中, 设绳与杆成 θ 时绳上的拉力大小为 F_T , 物块加速度大小为 a , 小球的加速度大小为 a_1 . 由牛顿第二定律有

$$m_1g - F_T\cos\theta = m_1a \quad (17)$$

$$F_T - m_2g = m_2a_1 \quad (18)$$

解得

$$F_T = \frac{m_1a + m_2a_1 - m_1g + m_2g}{1 - \cos\theta} \quad (19)$$

当小球加速度为零时其速度最大, 此时 $F_T = m_2g$, 由图 8 可得对应的 θ 约为 45.0° , 由式(19) 可以得物块加速度 $a = -1.78$ m/s². 说明该时刻物块在向下减速.

而物块加速度为零时, θ 约为 59.6° , 有

$$m_1g - F_T\cos\theta = 0 \quad (20)$$

解得 $F_T = 59.3$ N, 利用式(18), 可得小球的加速度大小为 1.86 m/s².

总之, 在解答以杆物绳系为背景命制的部分习题时, 很容易出现物体加速度关系的错误, 从而得出错误的结论. 期望本文的思路能为大家提供一点参考.

参考文献

1 王朝银. 步步高 教师版复习用书 物理[M]. 哈尔滨: 黑龙江教育出版社, 2021. 175

2 宋辉武, 赵林明, 赵日峰. 一道答案有误的竞赛题[J]. 物理教学探讨, 2014(9): 37 ~ 38