教育技术应用

基于 GeoGebra 和 VPython 的天体运行数值模拟*

陈海涛
（云南师范大学物理与电子信息学院　云南 昆明　650500）
金惠吉
（昆明市第八中学　云南 昆明　650222）
杨秀发
（昆明市第十四中学　云南 昆明　650106）
任　鹏
（云南师范大学实验中学　云南 昆明　650031）

（收稿日期：2022 - 02 - 19）

摘　要：利用 GeoGebra 和 VPython 进行天体运动的数值模拟.先从较为简单的牛顿的“大炮”问题入手，基于微分方程采用欧拉法用 VPython 进行数值模拟，接着又用 GeoGebra 解常微分方程组的指令同样成功模拟了天体的运动，再利用类似的方法对较为复杂的问题“拉格朗日点”进一步进行了研究.

关键词：GeoGebra　VPython　天体运动　拉格朗日点　数值模拟　欧拉法

2018 年 4 月教育部印发的《教育信息化 2.0 行动计划》指出，以教育信息化支撑引领教育现代化，是新时代我国教育改革发展的战略选择，对于构建教育强国和人力资源强国具有重要意义[1]．2017 版最新《普通高中物理课程标准》在高中物理课程的基本理念中指出，要通过多样化的教学方式，利用现代信息技术，引导学生理解物理学的本质，增强科学探究能力[2].

近年来，有许多学者在利用信息技术辅助物理教学方面取得了丰硕成果. 例如，2021 年，文献[3]用 COMSOL 软件模拟了“磁场和磁感线”；文献[4]用 Unity3D 软件设计和仿真了光学实验；2020 年，文献[5]将 LabVIEW 软件运用到了光速测定实验中等.

Python 是一种面向对象的程序设计语言，语法简洁清晰、上手容易，适合非专业计算机出身的物理教师学习. VPython 是建构在 Python 程序设计语言之上的一个模块，能够方便做出三维动画且计算功能也非常强大，很适合进行物理的仿真模拟.

GeoGebra 是一款开源、免费、易上手，且支持 PC 端、手机端、网页端等多种渠道操作的功能强大的软件，无需编程功底就可以制作出很多物理情境的模拟.

1　牛顿的“大炮”

如图 1 所示，在离地面一定高度水平抛出一物体，当初速度小于第一宇宙速度时，物体沿椭圆曲线 a、a_1 落地；当速度为第一宇宙速度时，物体沿圆轨道 b 运行；当初速度介于第一宇宙速度和第二宇宙速度之间时，物体沿椭圆轨道 c 运行；初速度等于第二宇宙速度时，物体沿抛物线轨道 d 离开地球，大于第二宇宙速度时物体沿双曲线 e 离开地球.

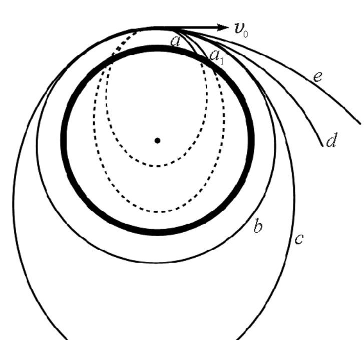


图 1　牛顿的“大炮”示意图

* 云南省哲学社会科学规划教育学项目“基于 GeoGebra 的高中物理可视化教学资源开发及教学融合研究”阶段性成果，项目编号：AD20003

为了模拟这一现象，可先由牛顿第二定律和几何关系，建立微分方程组

$$\begin{cases} v_x=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ v_y=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ r=\sqrt{x^2+y^2} \\ a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{GM}{r^2} \\ a_x=\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{GM}{r^2}\dfrac{x}{r} \\ a_y=\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{GM}{r^2}\dfrac{y}{r} \end{cases}$$

1.1 Vpython 数值模拟方法

将上述微分方程和初始条件转化为计算机代码，基于 Vpython 库用 Python 编程如下：

```
from vpython import *
scene = canvas(width = 1200,height = 1000,background=vector(1,1,1))
Re = 6.4 * 10 * * 6;H = 1.5 * Re;m_earth = 6 * 10 * * 24;m_satellite=1000;G=6.67 * 10 * * (-11)
# 参数设置
v0 =(G * m_earth/H) * * 0.5
T = 2 * pi * H/v0
earth = sphere(pos = vector(0,0,0),radius = Re,texture=textures.earth,opacity=0.6) # 地球
satellite =[] # 卫星
for i in range(5,18,1):
    satellite.append(sphere(pos=vector(0,H,0),v = vector(0.1 * i * v0,0,0),radius = 0.09 * Re,a=vector(0,0,0),color=color.red,make_trail = 1) )
t = 0;dt = 0.01
while t <= T:
    t = t + dt
    rate(10000)
    for b in satellite:
        axis = earth.pos - b.pos # 计算卫星瞬时径向矢量
        Fn=G * m_earth * m_satellite/(mag(axis)) * * 2 # 计算万有引力数值大小
        FG = Fn * axis.norm()  # 计算万有引力矢量
        b.a = FG/m_satellite  # 计算卫星加速度矢量
        b.v +=b.a * dt # 计算卫星速度矢量
        b.pos += b.v * dt # 计算卫星位置矢量
```

运行效果如图 2 所示.

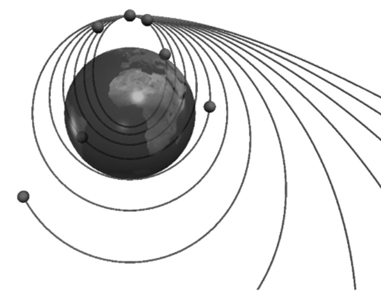
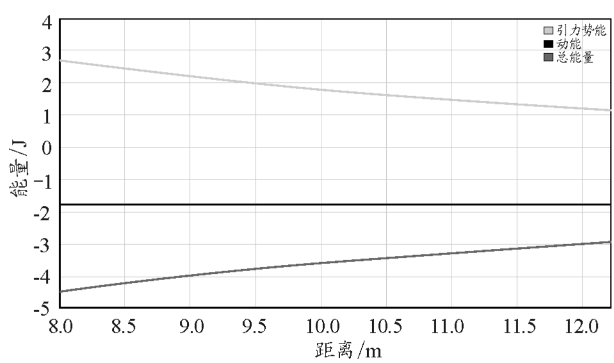


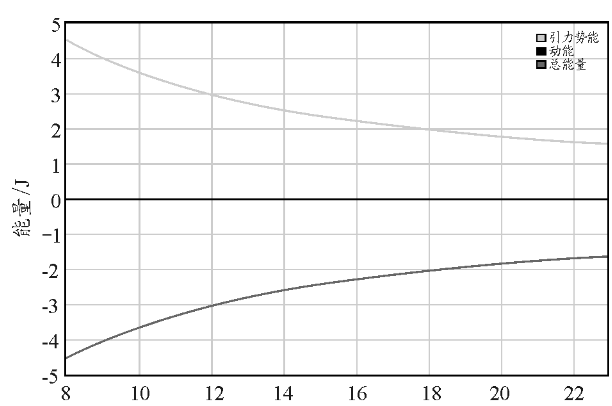
图 2 Python 运行效果图

接着还可以使用 Vpython 中的绘图语句实时绘制各卫星在轨道上的能量变化情况，如图 3 ～ 5 所示.



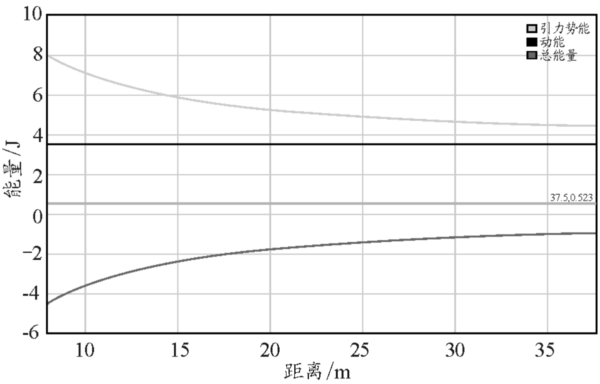
(从上到下依次表示“动能-距离”“总能量-距离”以及“引力势能-距离”曲线)

图 3 卫星在椭圆轨道运行时的能量变化情况



(从上到下依次表示“动能-距离”“总能量-距离”以及“引力势能-距离”曲线)

图 4 卫星在抛物线轨道上运行时的能量变化情况



(从上到下依次表示“动能-距离” “总能量-距离”以及“引力势能-距离”曲线)

图 5　卫星在双曲线轨道上运行时的能量变化情况

1.2　GeoGebra 数值模拟方法

在 GeoGebra 中,无需编程,基于解常微分方程组的指令,仅需要非常简单的步骤就可以模拟天体运动.

首先在 GeoGebra 代数区中定义参数滑动条,为方便起见,可设 $G=1$,$M=10$,$m=1$,环绕天体初始位置的横坐标 x_{01}=10,纵坐标 y_{01}=0,初速度水平分量 v_{x01}=0,竖直分量 v_{y01}=1,接着根据微分方程分别输入

$$v_{x_1}{}'(t,x_1,y_1,v_{x_1},v_{y_1})=-GM\frac{x_1}{(x_1^2+y_1^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$v_{y_1}{}'(t,x_1,y_1,v_{x_1},v_{y_1})=-GM\frac{y_2}{(x_1^2+y_1^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$x_1{}'(t,x_1,y_1,v_{x_1},v_{y_1})=v_{x_1}$$

$$y_1{}'(t,x_1,y_1,v_{x_1},v_{y_1})=v_{y_1}$$

再根据 GeoGebra 的解常微分方程组指令输入“NSolveODE({x_{1}′,y_{1}′,v_{x1}′,v_{y1}′},0,{x_{01},y_{01},v_{x01},v_{y01}},1000)”,直接输入后,软件会自动分别给出“x_{1}-t”“y_{1}-t”“v_{x1}-t”“v_{y1}-t”图像,自动命名为“numericalIntegral1、numericalIntegral1_{2}、numericalIntegral1_{3}、numericalIntegral1_{4}”.指令中第一部分是导数列表,第二部分的“0”为 t 的初始值,第三部分分别是 $t=0$ 时的“x_{1}”“y_{1}”“v_{x1}”和“v_{y1}”的值,第四部分的 1000 为 t 的末值.再输入“len=length(numericalIntegral1)”,给出构成图像的点的数目;输入“t′=Slider(0,1,1/len)”,其中“1/len”为增量,这样 t' 每次增加都会对应于 numericalIntegral1 中的下一个点.接着设中心天体所在位置“A=(0,0)”,为了得到环绕天体的位置,先输入“B=Point(numericalIntegral1,t′)”,得到“(t,x_{1})”点,该描点指令中第二个 t' 是路径值,取值在 0～1 之间,决定了取值在 numerical-Integral1 中的相应位置,例如若取“0”则为第一个点,“1”则为最后一个点,“1/len”则为第二个点.再输入“C=Point(numericalIntegral1_{2},t′)”得到“(t,y_{1})”点,输入“D=(y(B),y(C))”即可得到环绕天体位置坐标.最后,启动 t' 动画即可观察到环绕天体的运动,t' 乘上 1000 即为真实时间 t.

改变不同的环绕天体初速度大小即可观察到如图 6～8 所示的轨迹图,可以发现当初速度正好等于临界速度 1 时,轨迹的确是一个圆且环绕一周用时和理论计算是一致的,当初速度大小为 1.3 时,可以观察到轨迹的确是一个椭圆,且环绕一周大约用了 364 s,当初速度大小为 2.7 m/s,即大于第二宇宙速度时,可以观察到环绕天体脱离地球的束缚.

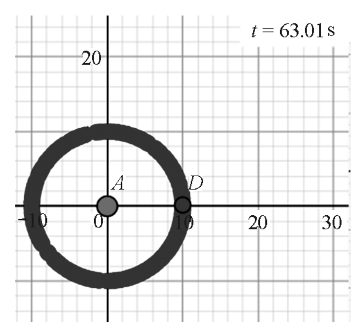


图 6　设置“v_{y01}=1”时

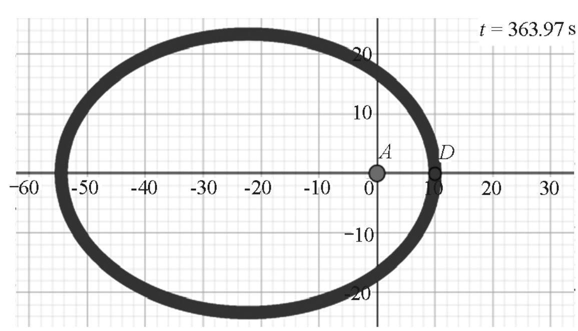


图 7　设置“v_{y01}=1.3”时

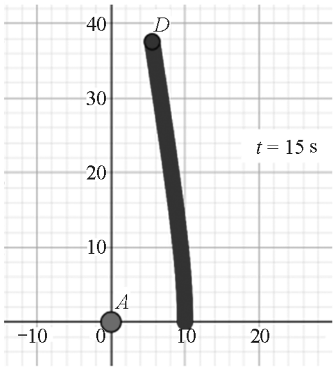


图 8　设置“v_{y01} = 2.7”时

2　拉格朗日点

为了展示出“太阳-地球”双星系统的运行情况，可设 $G=6.67$，太阳质量 m_s 为 100，地球质量 m_e 为 30，卫星质量为 m，太阳到质心 C 的距离为 6，质心 C 位于原点. 根据质心公式即可计算出地球到质心 C 的距离为 20. 根据理论易推导出 L_4 和 L_5 与太阳和地球的位置严格构成等边三角形的关系[6～8]，如图 9 所示.

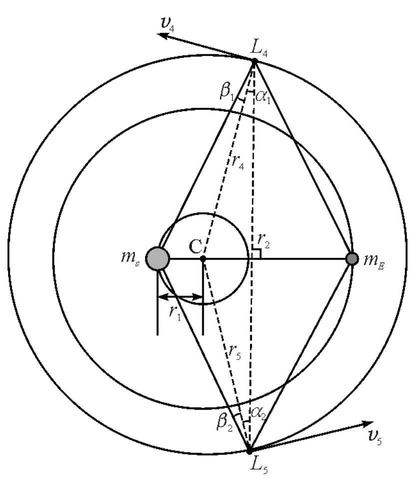


图 9　L_4 和 L_5 拉格朗日点示意图

根据牛顿第二定律和对称性即可得出各天体的微分方程

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{m_s}=-Gm_e\frac{\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|^3}-Gm_4\frac{\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_4}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_4|^3}-Gm_5\frac{\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_5}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_5|^3}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{m_e}=-Gm_s\frac{\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|^3}-Gm_4\frac{\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_4}{|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_4|^3}-Gm_5\frac{\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_5}{|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_5|^3}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{m_4}=-Gm_s\frac{\boldsymbol{r}_4-\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_4-\boldsymbol{r}_1|^3}-Gm_e\frac{\boldsymbol{r}_4-\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_4-\boldsymbol{r}_2|^3}-Gm_5\frac{\boldsymbol{r}_4-\boldsymbol{r}_5}{|\boldsymbol{r}_4-\boldsymbol{r}_5|^3}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{m_5}=-Gm_s\frac{\boldsymbol{r}_5-\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_5-\boldsymbol{r}_1|^3}-Gm_e\frac{\boldsymbol{r}_5-\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_5-\boldsymbol{r}_2|^3}-Gm_4\frac{\boldsymbol{r}_5-\boldsymbol{r}_4}{|\boldsymbol{r}_5-\boldsymbol{r}_4|^3}$$

2.1　Vpython 数值模拟方法

将拉格朗日点的数学模型和初始参数转化为计算机代码，基于 Vpython 库用 Python 编程如下(部分代码)：

```
t=0;dt=0.001;m_earth=30;m_sun=100;G=6.67  # 设置参数
earth=sphere(pos=vector(20,0,0),radius=1,texture=textures.earth,make_trail=1)# 地球
sun=sphere(pos=vector(-6,0,0),radius=2,color=color.red,make_trail=1) # 太阳
x0=sphere(pos=vector(0,0,0),radius=0.1,color=color.red)# 质心
r=26;r1=20;r2=6;Fn=G*m_earth*m_sun/(r**2);w=sqrt((G*(m_earth+m_sun))/(r**3));period=2*pi/w
earth_v0=(G*m_sun*r1/(r**2))**0.5;earth.v=vector(0,earth_v0,0)
sun_v0=(G*m_earth*r2/(r**2))**0.5;sun.v=vector(0,-sun_v0,0)
m_prober4 = 1;prober4 = sphere(pos = vector(r*cos(pi/3)-6,r*sin(pi/3),0),radius=0.5,color=color.red,make_trail=1)
r4=sqrt(r2**2+r**2-2*r2*r*cos(pi/3));cos_beta = (26**2 + r4**2 - r2**2)/(2*26*r4)
β1=acos(cos_beta);α1=(pi/6-β1);v4_0=w*(r4)
v4= vector(-v4_0*cos(α1),v4_0*sin(α1),0)
m_prober5 = 1;prober5 = sphere(pos = vector(r*cos(pi/3)-6,-r*sin(pi/3),0),radius=0.5,color=color.red,make_trail=1)
r5=sqrt(r2**2+r**2-2*r2*r*cos(pi/3));cos_beta = (26**2 + r5**2 - r2**2)/(2*26*r5)
β2=acos(cos_beta); α2=(pi/6-β2);v5_0=w*(r5)
```

v5＝ vector(v5_0 ＊cos(α2),v5_0 ＊sin(α2),0)

运行结果如图 10 所示.

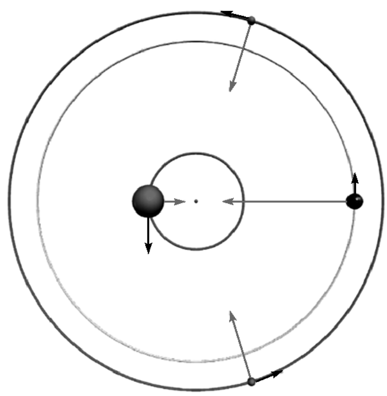


图 10 L_4 和 L_5 拉格朗日点 Python 模拟效果图

2.2 GeoGebra 数值模拟方法

在 GeoGebra 中,类似地,基于解常微分方程组的指令,无需编程就可模拟出两卫星分别处在拉格朗日点 L_4 和 L_5 时太阳、地球以及两卫星的运动.

首先在 GeoGebra 代数区中定义参数滑动条,为方便起见,可设 $G=6.67$,太阳质量 $m_1=100$,地球质量 $m_2=30$,两卫星质量由于远远小于地球和太阳质量,不妨分别设为 $m_3=0$,$m_4=0$,接着,若让质心处在原点(0,0) 处,则根据理论推导易得太阳、地球、处在 L_4 位置和 L_5 位置的卫星的横坐标应分别定义为:

x_{10}＝－6、x_{20}＝20、x_{30}＝7、x_{40}＝7

纵坐标分别定义为:

y_{10}＝0、y_{20}＝0、y_{30}＝26 sin(π/3)、y_{40}＝－26 sin(π/3)

初速度水平分量分别定义为:

v_{x10}＝0、v_{x20}＝0、v_{x30}＝－ω r_{4} cos(α)、v_{x40}＝ω r_{4} cos(α)

初速度竖直分量分别定义为:

v_{y10} ＝－ sqrt(G＊30 ((6)/(26^(2))))、v_{y20}＝sqrt(G＊100 ((20)/(26^(2))))、v_{y30}＝ω r_{4} sin(α)、v_{y40}＝ω r_{4} sin(α).其中,ω ＝ sqrt(G ((m1 ＋ m2)/((x_{20} － x_{10})^3))),r_{4} ＝ sqrt(6^(2) ＋ 26^(2) － 2＊26＊6 ((1)/(2))),α ＝ ((π)/(6)) － cos^(－1)(((26^(2)＋r_{4}^(2)－6^(2))/(2＊26 r_{4})))

接着根据微分方程输入

$$x_1'(t,x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3,x_4,y_4,vx_1,vy_1,vx_2,vy_2,vx_3,vy_3,vx_4,vy_4)=vx_1$$

$$y_1'(t,x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3,x_4,y_4,vx_1,vy_1,vx_2,vy_2,vx_3,vy_3,vx_4,vy_4)=vy_1$$

$$vx_1'(t,x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3,x_4,y_4,vx_1,vy_1,vx_2,vy_2,vx_3,vy_3,vx_4,vy_4)=$$

$$-Gm_2\frac{x_1-x_2}{[\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}]^3}-Gm_3\frac{x_1-x_3}{[\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}]^3}-Gm_4\frac{x_1-x_4}{[\sqrt{(x_1-x_4)^2+(y_1-y_4)^2}]^3}$$

$$vy_1'(t,x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3,x_4,y_4,vx_1,vy_1,vx_2,vy_2,vx_3,vy_3,vx_4,vy_4)=$$

$$-Gm_2\frac{y_1-y_2}{[\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}]^3}-Gm_3\frac{y_1-y_3}{[\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}]^3}-Gm_4\frac{y_1-y_4}{[\sqrt{(x_1-x_4)^2+(y_1-y_4)^2}]^3}$$

根据对称性很容易给出另外 3 个天体的微分方程,最后得到有 16 个微分方程的微分方程组.接着再输入解微分方程组指令解出 16 个微分方程:

NSolveODE({x_{1}′,y_{1}′,x_{2}′,y_{2}′,x_{3}′,y_{3}′,x_{4}′,y_{4}′,vx_{1}′,vy_{1}′,vx_{2}′,vy_{2}′,vx_{3}′,vy_{3}′,vx_{4}′,vy_{4}′},0, {x_{10},y_{10},x_{20},y_{20},x_{30},y_{30},x_{40},y_{40},v_{x10},v_{y10},v_{x20},v_{y20},v_{x30},v_{y30},v_{x40},v_{y40}},100)

再接着操作步骤和 1.2 中例子类似,不再赘述.最终运行效果如图 11 所示.

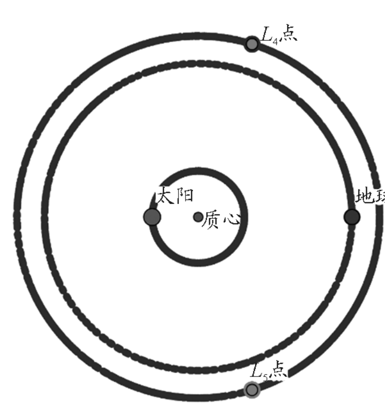


图 11 L_4 和 L_5 拉格朗日点 GeoGebra 模拟效果图

(下转第 140 页)

【例2】如图5所示，沿斜面把质量为12 kg的一个物体匀速拉到最高处，沿斜面向上的拉力 $F=100$ N，斜面长2 m，高1 m，则其机械效率是________%，物体所受摩擦力是__________ N. 当选用表面材质、高度均相同的斜面时，斜面越短越__________（选填“省力或“费力”），机械效率__________（选填“越高”“不变”或“越低”）.（取 $g=10$ N/kg）

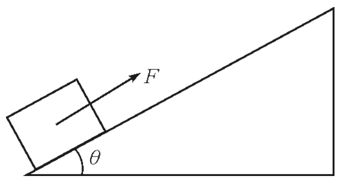


图5 例2情境图

试题分析：斜面高1 m，斜面长2 m，设斜面倾角 θ，则 $\sin\theta=0.5$，则 θ 等于30°，此角度也比较小，在这种情况下，“当选用表面材质、高度均相同的斜面时，斜面越长”则倾角 θ 越小，拉力 F 将变小，符合实际. 但是“当选用表面材质、高度均相同的斜面时，斜面越短越？”则倾角 θ 越大，角度有可能突破临界角，出现 F 随 θ 增大而减小的情况，故该问法不够严谨. 应当修改为，“当选用表面材质、高度均相同的斜面时，斜面越长越______？”

总之，深入探索物理试题背后的理论支撑，才能保证试题的科学性、严谨性，从而更好地发挥考试对推动教育教学改革、提高学生综合素质的作用.

参考文献

1 教育部关于加强初中学业水平考试命题工作的意见[Z]. 教基〔2019〕15号

（上接第137页）

3 结束语

本文用Vpython和GeoGebra分别成功模拟了牛顿的“大炮”以及拉格朗日点的运行轨迹，其中前者采用了欧拉法的数值模拟方法，后者则采用了GeoGebra模拟物理情境方面的最新技术——解常微分方程组指令，两者都通过物理情境模拟生动展示出了理论的预测结果，不仅验证了理论，同时也加深了我们对理论的理解. 若将这个技术运用到物理的教学与学习中，能够使自身以及学生更好地理解数学模型、计算机算法和相应物理现象之间的联系，提高跨学科的综合运用能力.

参考文献

1 教育部. 教育部关于印发《教育信息化2.0行动计划》的通知[EB/OL]. (2018-04-18) [2021-12-30]. http://www.moe.gov.cn/srcsite/A16/s3342/201804/t20180425_334188.html
2 中华人民共和国教育部. 普通高中物理课程标准[M]. 北京：人民教育出版社，2018
3 王畅，王海锋，高艳. COMSOL软件在高中物理教学中的应用——以“磁场和磁感线”为例[J]. 物理通报，2021(2)：97～99，103
4 赵洋洋，盛思远. 基于Unity3D的物理光学实验的设计与仿真[J]. 物理实验，2021，41(2)：49～52
5 冉俊霞，葛大勇，张少朋. LabVIEW在光速测定实验中的应用[J]. 物理通报，2020(6)：86～88
6 周小奋. 拉格朗日点探秘[J]. 物理教学，2012，34(3)：53～54
7 李铁. 关于天体圆轨道三体模型中拉格朗日点的讨论[J]. 湖南中学物理，2021，36(3)：73～74，51
8 林辉庆. 拉格朗日 L_4 点的理论验算[J]. 物理教师，2012，33(4)：42～43
9 张恒谦. 奇妙的拉格朗日点[J]. 中学物理教学参考，2011，40(10)：29～30
10 金乐，黄天宇. 用数值模拟演示地球轨道运动的研究[J]. 钦州学院学报，2015，30(5)：45～48
11 Joseph Amato. Using Elementary Mechanics to Estimatethe Maximum Range of ICBMs[J]. *The Physics Teacher*，2018，56(4)
12 张继春. Python编程与3D物理学仿真[M]. 北京：电子工业出版社，2021