平抛运动的越障临界条件及应用

平贵生
（曲靖市民族中学　云南 曲靖　655331）
曾秀花
（曲靖师范学院　云南 曲靖　655011）

（收稿日期：2022－03－29）

摘　要：从平抛运动轨迹方程出发，分析得出平抛运动物体在存在障碍物时跨越障碍物应满足的临界条件，为涉障平抛运动的问题设计和问题分析提供了思路，也为排球、乒乓球等有网运动项目的教学和训练提供了有益指导.

关键词：平抛运动　越障临界条件　轨迹方程

涉障平抛运动是指物体在做平抛运动过程中有障碍物存在的运动，排球、乒乓球、羽毛球运动时水平击球过网，球网就是障碍物，投掷物体入筐时，筐边就是障碍物. 越障临界条件是指物体刚好能跨越障碍物时各运动参量需要满足的条件，越障临界条件是分析涉障平抛运动问题的关键.

1　越障临界条件

1.1　越障临界条件方程

如图1所示，设抛出点高度为 H，障碍物高度为 L，抛出点与障碍物的距离为 d，落点与障碍物的距离为 s，平抛运动的初速度为 v_0，以抛出点为坐标原点，以竖直向下为 y 轴正方向，以初速度方向为 x 轴正方向，有 $x=v_0t$，得

$$t=\frac{x}{v_0}$$

则

$$y=\frac{1}{2}gt^2=\frac{g}{2v_0^2}x^2$$

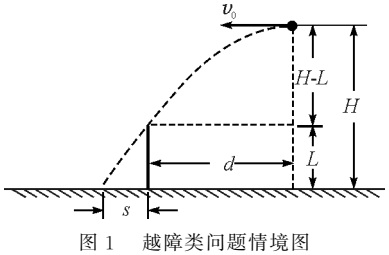

图1　越障类问题情境图

物体刚好跨越障碍物时，落地点和障碍物最高点均在同一抛物线上，因此，在障碍物最高点

$$H-L=\frac{g}{2v_0^2}d^2$$

落地点

$$H=\frac{g}{2v_0^2}(d+s)^2$$

越障临界条件

$$\frac{H-L}{H}=\frac{d^2}{(d+s)^2}$$

越障临界条件方程中 H、L、s、d 这4个参量互相制约、相互匹配，只要其中3个量确定，剩下的第4个量唯一确定. 物体平抛后能否跨越障碍物只决定于 H、L、s、d 这4个参量，与平抛初速度无关，4个参量匹配后再决定唯一对应的平抛初速度 v_0. 可以将 H、L、s、d 和 v_0 称为平抛运动的5个临界参量，各临界参量的表达式如下

$$H=\frac{(d+s)^2}{s^2+2ds}L=\left(1+\frac{d^2}{s^2+2ds}\right)L$$

$$L=\frac{s^2+2ds}{(d+s)^2}H=\left[1-\frac{d^2}{(d+s)^2}\right]H$$

$$s=\left(\sqrt{\frac{H}{H-L}}-1\right)d$$

$$d=\frac{\sqrt{H(H-L)}+H-L}{2H-L}s$$

作者简介：平贵生（1969－　），男，中教高级，主要从事中学物理教学及研究.

$$v_0=\sqrt{\frac{g}{2H}}(d+s)=$$

$$\sqrt{\frac{g(s^2+2ds)}{2L}}=\sqrt{\frac{g}{2(H-L)}}d=$$

$$\sqrt{\frac{g}{2H}}\left[\frac{\sqrt{H(H+L)}+H-L}{2H-L}+s\right]$$

平抛运动涉障问题最基本的问题模型是根据越障临界条件,在已知 3 个临界参量的条件下求解另外两个临界参量.

如图 2 所示,在满足越障条件的情况下,平抛初速度越大,落点到障碍物的距离 s 越大,越障临界条件所对应的 s 为越障后的最小落点距离.

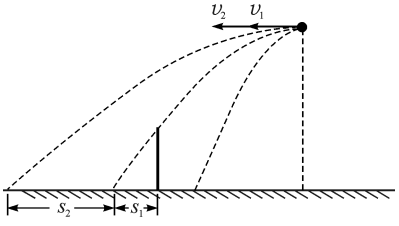

图 2　平抛初速度与距离 s 关系

1.2　越障临界参量变化规律

平抛运动越障临界条件涉及 H、L、s、d 这 4 个临界参量,采用控制变量的思想,在保证其中两个参量确定的条件下,分析另外两个参量的变化规律,是临界参量变化问题的基本模型. 临界参量变化问题有以下 6 种情况.

(1) 如图 3 所示,在 L、d 确定并满足越障条件时,H 越大,s 越小. 排球水平击球时,过网是越障,不出界是对方场地到球网的距离大于等于越障条件所对应的越障后的落点距离 s(越障后的最小距离). 击球高度的最小值对应着 s 的最大值,对方球场边界与球网的距离为排球不出界时落点距离的最大值,只要 s 小于对方球场边界与球网的距离就能通过改变 v_0 实现过网且不出界.

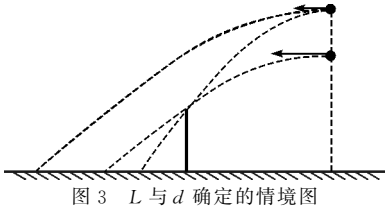

图 3　L 与 d 确定的情境图

(2) 如图 4 所示,在 H、L 确定并满足越障条件时,d 越大,s 越大. 在掷物入筐时,投掷点距筐的最远距离 d 对应的是物体落入筐底的最远位置,当投掷点逐渐向筐靠近时,物体的落点位置逐渐向筐内边(与投掷点靠近的筐边)靠近.

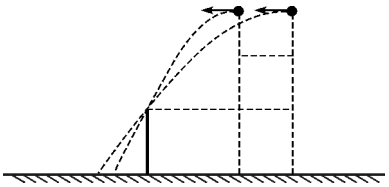

图 4　H 与 L 确定的情境图

(3) 如图 5 所示,在 H、d 确定并满足越障条件时,L 越大,s 越大. 水平击球时,球网越高,落点距离越远.

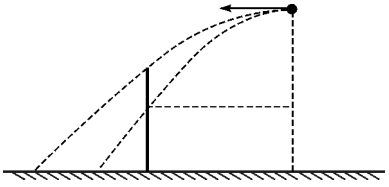

图 5　H 与 d 确定的情境图

(4) 如图 6 所示,在 L、s 确定并满足越障条件时,H 越大,d 越大. 水平击球要打同一点时,击球点距网越远,运动员应跳的越高. 身高不同的两人越障掷物到同一位置,个子高的应站较远位置.

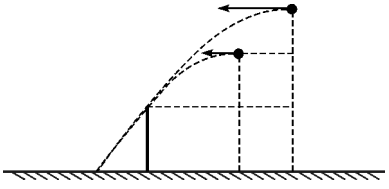

图 6　L 与 s 确定的情境图

(5) 如图 7 所示,在 H、s 确定并满足越障条件时,L 越大,d 越小. 同一人同一高度掷物入不同高度筐的底部,筐越高,掷物点距筐越近. 运动员同一高度击球擦网至同一位置时,若网降低,击球位置应后移.

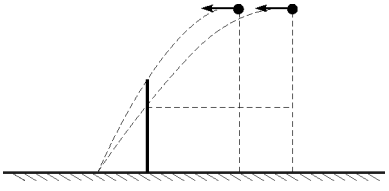

图 7　H 与 s 的情境图

(6) 如图 8 所示,在 s、d 确定并满足临界越障条件时,L 越大,H 越大.

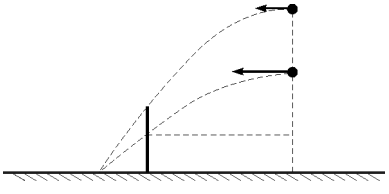

图 8　s 与 d 确定的情境图

2　涉障问题例析

【例 1】如图 9 所示，排球场总长 18 m，设网的高度为 2 m，运动员站在网前的 3 m 线上正对网前竖直跳起把球水平击出. 若击球点的高度不够，无论球被水平击出的速度多大，球不是触网就是出界，因此击球点的高度应不低于_____.

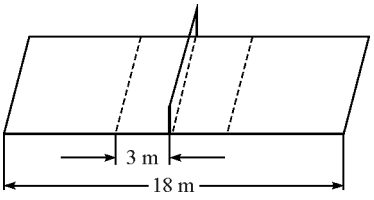

图 9　例 1 题图

分析：网高 L 和击球点到网的距离确定，击球点的高度 H 越大，临界落点距离 s 越小. 当击球高度 H 最小时，临界落点距离 s 最大，只要临界落点距离 s 不超过对方边界与球网的水平距离即 $s\leqslant 9$ m，就可以通过调节击球速度 v_0 实现既过网又不出界. 由越障临界条件可得

$$\frac{H-L}{H}=\frac{d^2}{(d+s)^2}$$

得

$$H=\frac{(d+s)^2}{s^2+2ds}L=\left(1+\frac{d^2}{s^2+2ds}\right)L$$

由题知

$$L=2\text{ m}\qquad d=3\text{ m}\qquad s\leqslant 9\text{ m}$$

代入上式得

$$H\geqslant\frac{288}{135}=\frac{32}{15}\approx 2.13\text{ m}$$

【例 2】如图 10 所示，装球的球筐固定在水平地面上，小明将玩具小球(可视为质点) 水平抛出并投入球筐中. 球筐高度 $h=0.55$ m，宽度 $l=1$ m. 小球的抛出点离地面的高度 $H=1.8$ m，离球筐右壁的水平距离 $d=6$ m. 重力加速度 g 取 10 m/s^2，筐壁厚和空气阻力不计. 求：

(1) 要使玩具小球能落入筐中，小明抛球时的速度大小应满足什么条件；

(2) 要使玩具小球直接落在筐底，在保持抛球位置高度不变的条件下，小明至少前进多少距离；

(3) 要使玩具小球直接落在筐底，在保持抛球位置与球筐的距离不变的条件下，小明抛球点位置的高度应为多少.

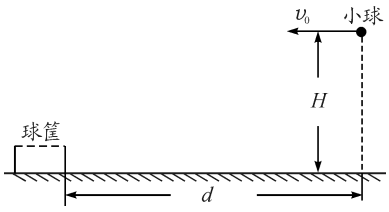

图 10　例 2 题图

分析：(1) 能入筐的条件是，在下落 1.25 m 高度时，水平位移 6 m $\leqslant x\leqslant$ 7 m. 如图 11 所示，以竖直向下为 y 轴正方向，以水平向左为 x 轴正方向，有

$$y=\frac{g}{2v_0^2}x^2$$

可得

$$v_0=\sqrt{\frac{g}{2y}}x$$

代入数据得

$$12\text{ m/s}\leqslant v_0\leqslant 14\text{ m/s}$$

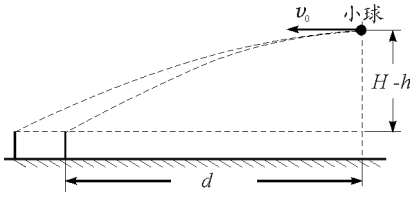

图 11　例 2(1) 问情境图

(2) 越障临界落点距离是物体跨越障碍物后的最小落点距离，物体能直接落入筐底的条件是，越障临界落点距离 s 不超过筐的宽度，即 $s\leqslant 1$ m. 如图 12 所示，设小明前进 x 时刚好能将小球直接投入筐底，根据越界临界条件有

$$\frac{H-h}{H}=\left(\frac{d-x}{d-x+l}\right)^2$$

代入数据得

$$x=1\text{ m}$$

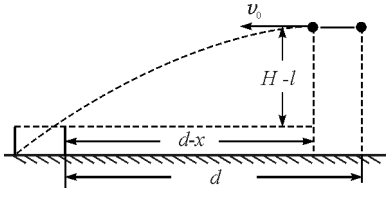

图 12　例 2(2) 问情境图

(3) 设在保持投射点与筐的水平距离不变的条件下，投射点高度变为 H_1 时，玩具小球刚好能落入筐底. 投射点位置越高，越障临界落点距离越小，小球刚好落在筐左侧底部时对应的投射点高度是小球能直接落入筐底的最小值. 根据越界临界条件有

$$\frac{H_1-h}{H_1}=\left(\frac{d}{d+l}\right)^2$$

代入数据得

$$H_1\approx 2.07\text{ m}$$