



对电磁感应题设条件“自洽性”的深度讨论

戎 杰 金天哲 胡科杰

(浙江省慈溪中学 浙江 宁波 315300)

(收稿日期:2022-04-06)

摘 要:利用解微分方程和 Matlab 作图等方法,从定性和定量的角度对一道电磁感应高考模拟题题设条件“自洽性”进行深度讨论,关注过程分析,形成科学思维,对教师命题给出建议。

关键词:定性和定量;自洽性;过程分析;科学思维

在新课改背景下,从“浅层教学”过渡到“深度学习”是大势所趋。在教学过程中,以教师指导为基础,学生对相关信息进行加工处理,通过对问题积极而富有创新性的思考和探索,完成对知识的理解和迁移,可以推动高阶物理思维的形成。

复杂的变加速运动模型是高中物理的难点,在电磁感应问题中常有典型。对于此类问题,由于大多数学生不具备微积分等数学知识,教师常常对过程分析“避而远之”,转而引导学生抓住始末状态,“淡化”中间过程,熟练掌握动能定理、动量定理等方法来解决相关问题。这在一定程度上变相“引导”学生忽视对物理过程的严谨分析和深入思考,久而久之产生“过程不清晰也不妨碍做题”的错觉,不利于学生科学思维的培养和学科核心素养的形成。由于“回避”中间过程的讨论,教师在命题时也容易出现题设条件“不自洽”的情况。笔者以浙江省绍兴市柯桥区某高三物理模拟考第 22 题为例做简要阐述。原题如下。

【例题】平行光滑的金属导轨 AB 和 CD 相距为 $d=1\text{ m}$,导轨平面与水平面的夹角 $\theta=37^\circ$,其上端接一阻值为 $3\ \Omega$ 的灯泡,在 EF 和 GH 间存在与导轨平面垂直的匀强磁场 B_0 ,磁场区域宽度为 $L=1\text{ m}$,质量 $m_a=0.2\text{ kg}$,电阻 $R_a=3\ \Omega$ 的导体棒 a 与质量 $m_b=0.2\text{ kg}$,电阻 $R_b=6\ \Omega$ 的导体棒 b 通过一根长 $L_0=$

4 m 的轻绳(不可伸长)相连,现将 b 棒放置于磁场上边界 EF 处并锁定,并将 a 棒放置于 GH 处,如图 1 所示。在 $t=0$ 时刻开关 S 断开,并静止释放 a 棒,磁场 B_0 随时间 t 所示变化,如图 2 所示。当磁感应强度 B_0 达到 B_m 时开关 S 闭合,并解除 b 棒锁定。不计导轨的电阻,不计两棒之间的相互作用, $g=10\text{ m/s}^2$,求:

- (1) 在 $0\sim t_0$ 时间内,流过导体棒 a 的电流方向及大小;
- (2) 当绳绷紧的一瞬间(绷紧时间极短), b 棒获得的速度;
- (3) 已知 b 棒在穿越磁场的过程中产生的热量为 0.8 J ,试求 b 棒穿过磁场的的时间。

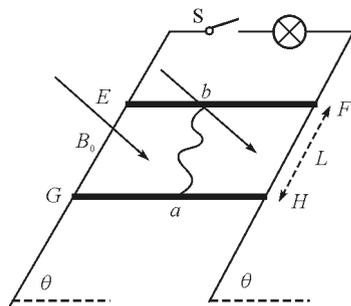


图 1 例题题图

分析:

- (1) 第(1)小题,由楞次定律可以判断电流方向为 $G\rightarrow H$,根据电路结构结合闭合电路欧姆定律,易

得电流大小 $I = \frac{2}{3} \text{ A}$.

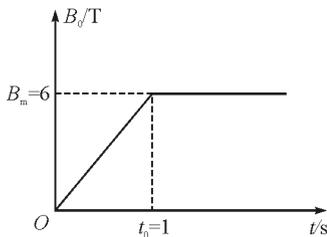


图2 磁感应强度 B_0 变化规律

(2) 第(2)小题,根据匀加速运动公式,结合绷紧瞬间双棒系统动量守恒,列式可得 b 棒在绳子绷紧瞬间速度为 3 m/s 。(前2小题求解过程不再赘述)

(3) 第(3)小题,参考答案给出如下求解过程谈。

当 b 棒穿越磁场过程中, a 棒在磁场外, b 棒作为电源, ab 双棒为“并联”状态,故电路总电阻

$$R_{\text{总}} = R_b + \frac{R_a R}{R_a + R} = 7.5 \Omega$$

因 b 棒发热量为 0.8 J ,故电路总发热量

$$Q_{\text{总}} = \frac{R_{\text{总}}}{R_b} Q_b = 1 \text{ J}$$

从 b 棒绷紧瞬间至 b 棒出磁场过程中,对 ab 棒系统运用动能定理

$$(m_a + m_b)gL \sin \theta - W_{\text{克安}} = \frac{1}{2}(m_a + m_b)(v_1^2 - v_2^2) \quad (1)$$

$$W_{\text{克安}} = Q_{\text{总}} = 1 \text{ J} \quad (2)$$

$$v_2 = 3 \text{ m/s} \quad (3)$$

联立式(1)~(3)可得

$$v_1 = 4 \text{ m/s}$$

对 a 棒和 b 棒系统(以下简称 ab 棒)运用动量定理

$$(m_a + m_b)gt \sin \theta - F_{\text{安}} t = (m_a + m_b)(v_1 - v_2) \quad (4)$$

$$F_{\text{安}} t = B \bar{I} d \Delta t = Bd \frac{\bar{E}}{R_{\text{总}}} \Delta t = Bd \frac{\Delta \varphi}{R_{\text{总}}} = \frac{B^2 d^2 l}{R_{\text{总}}} \quad (5)$$

联立式(4)和(5)得

$$t = \frac{13}{6} \text{ s}$$

笔者思考: b 棒在穿越磁场的过程中,经历了怎样的运动过程?速度随时间如何变化?如果运动过程是确定的,产生的焦耳热也必然是确定的.那么确实是 0.8 J 吗?心存这3个疑惑,笔者从定性和定量两个角度重新梳理了第(3)小题的分析思路.

1) 定性分析

当 ab 棒之间的绳子绷紧后, a 棒和 b 棒达到共速.若把 b 棒进入磁场的时刻记为 $t = 0$,则 $v_0 = 3 \text{ m/s}$.此后, ab 棒作为整体沿斜面向下运动.当 b 棒速度为 v 时, b 棒受到安培力

$$F_{\text{安}} = BId = B \frac{Bdv}{R_{\text{总}}} d = \frac{B^2 d^2 v}{R_{\text{总}}}$$

代入数据得

$$F_{\text{安}} = \frac{24}{5} v$$

而

$$(m_a + m_b)g \sin \theta = \frac{12}{5} \text{ N}$$

显然,在初始时刻($v_0 = 3 \text{ m/s}$)时,导体棒受到的安培力 $F_{\text{安}0} > (m_a + m_b)g \sin \theta$,即 ab 棒向下做减速运动,由于速度和安培力的变化,所以导体棒做变减速运动.

2) 定量探究

根据牛顿第二定律

$$a = \frac{F_{\text{合}}}{m_{\text{总}}} = \frac{(m_a + m_b)g \sin \theta - F_{\text{安}}}{(m_a + m_b)} = \quad (6)$$

$$6 - 12v = \frac{dv}{dt}$$

式(6)经化简得

$$dt = -\frac{1}{12v - 6} dv$$

$$\int_0^t dt = \int_3^v -\frac{1}{12v - 6} dv$$

$$t \Big|_0^t = -\frac{1}{12} \ln(12v - 6) \Big|_3^v \quad (7)$$

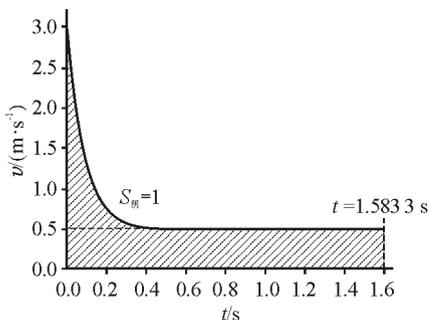
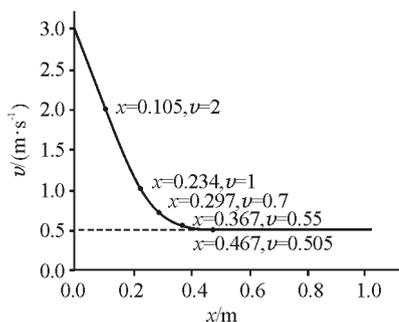
求解式(7)得

$$t = -\frac{1}{12} \ln\left(\frac{12v - 6}{30}\right) \quad (8)$$

由式(8)得 ab 棒整体的速度满足

$$v = \frac{5e^{-12t} + 1}{2} \quad (9)$$

用 Matlab 软件作出导体棒的 $v-t$ 图像和 $v-x$ 图像(图 3 和图 4), 不难发现: 导体棒 ab 的最终速度 v 趋向于 0.5 m/s , 但速度 v 达到 0.5 m/s 需经历的时间 $t \rightarrow +\infty$. 这意味着, 在有限的时间内, ab 棒“极近稳态”而最终无法真正达到“稳态”, 更不可能达到参考答案中所描述的速度 $v=4 \text{ m/s}$.

图3 导体棒 ab 速度随时间变化规律图4 导体棒 ab 速度随位移变化规律

那么 b 棒在磁场中需运动多少距离, 速度才能趋近于 0.5 m/s ? 题目描述的磁场宽度 $L=1 \text{ m}$ 是否足够让 b 棒趋近于这个速度? 因此有必要进一步探究 b 棒位移与速度关系. 根据式(6), 变形得

$$a = 6 - 12v = \frac{dv}{dt} = \frac{v dv}{dx} \quad (10)$$

化简得

$$dx = -\frac{v}{12v-6} dv = -\frac{1}{12} dv - \frac{1}{(24v-12)} dv \quad (11)$$

$$\int_0^x dx = \int_3^v -\frac{1}{12} dv + \int_3^v -\frac{1}{24v-12} dv$$

$$x \Big|_0^x = -\frac{1}{12} v \Big|_3^v - \frac{1}{24} \ln(24v-12) \Big|_3^v \quad (12)$$

求解式(12), 可得 b 棒的位移速度关系

$$x = \frac{1}{4} - \frac{v}{12} - \frac{1}{24} \ln\left(\frac{2v-1}{5}\right) \quad (13)$$

此方程为超越方程. 利用计算机求解后发现: 当 b 棒速度 v 比 0.5 m/s 大 1% , 即 $v=0.505 \text{ m/s}$, 这之前 b 棒通过的位移 $x=0.4669 \text{ m}$, 还不到磁场宽度的一半. 进一步分析可以发现, 当 $x=1$ 时, $v=0.50000014 \text{ m/s}$, 这个速度已经无限逼近 0.5 m/s . 可以认为, 当 b 棒离开磁场时, 速度已达到 $v=0.5 \text{ m/s}$. 结合速度时间关系式(9), 可求得 b 棒通过磁场区域的时间

$$t = -\frac{1}{12} \ln\left(\frac{2v-1}{5}\right) = 1.58 \text{ s}$$

根据动能定理

$$(m_a + m_b)gL \sin \theta - W_{\text{克安}} = \frac{1}{2}(m_a + m_b)(v^2 - v_0^2) \quad (14)$$

代入

$$v \approx 0.5 \text{ m/s} \quad v_0 = 3 \text{ m/s}$$

可求得

$$W_{\text{克安}} = Q_{\text{总}} \approx 4.15 \text{ J}$$

$$Q_b = \frac{Q_{\text{总}}}{R_{\text{总}}} R_b \approx 3.32 \text{ J}$$

综合上述分析, 笔者认为题目第(3)小题题干中所给的焦耳热数据是错误的, 与实际的运动情境“不自洽”.

在上述“不自洽”问题严谨分析的基础上, 还可总结得到更加一般的规律.

一般模型: 如图 5 所示, 水平导轨位于匀强磁场中, 磁感应强度为 B , 导轨宽度为 l , 导轨右侧接入电阻 R , 质量为 m 的导体棒置于导轨上(不计内阻), 在恒力 F 作用下, 从 $t=0$ 时刻开始, 以初速度 v_0 沿导轨水平向右运动. 需经过多长时间导体棒速度变为 v ? 此过程中导体棒的位移是多少?

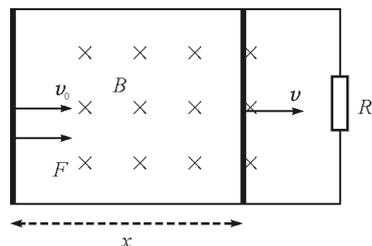


图5 一般模型图

分析:当导体棒速度为 v 时,受到安培力

$$F_{\text{安}} = BIl = \frac{B^2 l^2 v}{R}$$

方向水平向左.

加速度

$$a = \frac{F - F_{\text{安}}}{m} = \frac{F}{m} - \frac{B^2 l^2 v}{mR} = \frac{dv}{dt} \quad (15)$$

令

$$k = -\frac{B^2 l^2}{mR}$$

$$b = \frac{F}{m}$$

式(15)可简化为模型

$$kv + b = \frac{dv}{dt} \quad (16)$$

$$\int_0^t dt = \int_{v_0}^v \frac{1}{kv + b} dv$$

求解得

$$t = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{kv + b}{kv_0 + b} \right) \quad (17)$$

若 $F = 0$, 则 $b = 0$.

式(17)化简得

$$t = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{v}{v_0} \right)$$

$$v = v_0 e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t} \quad (18)$$

若要求导体棒位移,由式(16)变形得

$$kv + b = \frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{dx} \quad (19)$$

$$\int_0^x dx = \int_{v_0}^v \frac{v}{kv + b} dv$$

$$\int_{v_0}^v \frac{v}{kv + b} dv = \int_{v_0}^v \frac{1}{k} dv - \quad (20)$$

$$\int_{v_0}^v \frac{b}{k^2} \frac{1}{kv + b} d(kv + b)$$

求解得

$$x = \frac{v - v_0}{k} - \frac{b}{k^2} \ln \left(\frac{kv + b}{kv_0 + b} \right) \quad (21)$$

若 $F = 0$, 则 $b = 0$.

由式(21)得

$$x = \frac{v - v_0}{k}$$

代入 k 值,得

$$xk = -\frac{B^2 l^2}{mR} x = v - v_0 \quad (22)$$

而根据动量定理

$$\begin{aligned} -F_{\text{安}} t &= -BIl \Delta t = \\ -Bl \Delta q &= -Bl \frac{Blx}{R} = \\ -\frac{B^2 l^2 x}{R} &= m(v - v_0) \end{aligned} \quad (23)$$

可以发现:由微分方程推导得到的式(22)和由动量定理推导得到的式(23),在数学结果上“不谋而合”,说明两种方法在本质上是等价的.从上述例题的分析不难发现,题设条件一旦给定磁感应强度 B 、导体棒质量 m 、电阻 R 、切割长度 l 、初速度 v_0 、位移 x 这6个物理量,运动时间 t 和末速度 v 随即唯一确定,因此过程中产生的焦耳热也唯一确定,教师在命题时不能随便给出焦耳热的数据,这也是上述例题题设条件“不自洽”的根本原因.

进一步研究发现,在磁感应强度 B 、导体棒质量 m 、电阻 R 、切割长度 l 、初速度 v_0 、末速度 v 、位移 x 、运动时间 t 这8个物理量中,只要其中任意6个量已知,其余2个量即唯一确定.

作为教师,在命题的时候要“站得高、看得远”,切忌同时给出7个物理量作为已知条件,防止第7个量与其余6个量出现不自洽,犯“自相矛盾”的错误,在此与同行共勉.

参考文献

- [1] 张冬冬. 芝诺佯谬与收尾速度[J]. 中学物理·高中, 2015(3):64-65.
- [2] 张前军. 谈汽车以额定功率运动问题的命制[J]. 物理教师, 2013(4):74-75.
- [3] 谢秀芹. “趋近速度”类习题题设条件的自洽性[J]. 物理教学, 2015(7):68-70.