

# 基于驻波能量特征的矩形谐振腔电磁传播模式分析\*

物理·技术·应用

庞燕 范琦 杨百愚 武晓亮 孟跃宇

(空军工程大学基础部 陕西 西安 710051)

张亮

(空军军医大学基础医学院 陕西 西安 710032)

(收稿日期:2022-04-20)

**摘要:**驻波是大学物理课程内容中的一个重要概念,在实践中有非常广泛的应用.利用驻波的能量特征和分析方法可以对实际应用中很多复杂问题进行高效便捷的分析处理.基于驻波能量特征和分析方法对微波矩形谐振腔中电磁波的传播和能量分布特征进行分析.一方面克服传统分析方法的抽象性和复杂性,另一方面也可以为加强教师和学生对相关概念及其应用的理解提供重要参考.

**关键词:**大学物理;驻波;能量;矩形谐振腔;模式

驻波是一种特殊的物理现象,也是大学物理课程中的一个章节.它由同一直线上两列频率、振动方向、振幅相同,传播方向相反的相干波叠加而成.驻波无法传输能量,能量只能在波节和波腹中来回转移.这一规律和谐振十分类似.因此,可以参考驻波的能量分布特征去帮助我们理解具有谐振效果的物理现象或器件.

矩形谐振腔是微波技术领域中的一个重要器件,它既可以用于选频滤波,又可以组合构成阻抗匹配网络<sup>[1-3]</sup>.在学习分析矩形谐振腔时,通常需要基于麦克斯韦方程组求解波动方程,得到腔体内部电磁场的分布函数,进而求解相关工作参数.但由于矩形谐振腔中导行电磁波的工作模式多,模式分析理论性较高,电磁场分布函数复杂抽象,使得学生在学习这部分内容时对谐振腔内部不同工作模式下的电磁场的分布规律感到难以理解.

目前已知电磁波在矩形谐振腔内部主要以驻波的形式分布<sup>[4]</sup>.而驻波作为一种特殊的干涉现象,其物理规律在大学物理课程中已经有过较为详细的讲解<sup>[5-6]</sup>.特别是能量分布规律,已有不少文献做过详

细的分析研究<sup>[7-8]</sup>.因此,可以参考驻波的能量分布特征,从能量传输的角度对矩形谐振腔中电磁波的传播情况进行分析,进而得到谐振腔内部电磁场在不同工作模式下的分布情况.

本文基于驻波的能量传输特征,对矩形谐振腔内部电磁波的传播和能量分布特征进行分析,进而得到腔体内部不同工作模式下电磁场的分布规律.为提升学生对矩形谐振腔相关理论的理解程度以及丰富相关课程的课堂教学内容提供参考.

## 1 驻波能流密度特征

已知两列振幅均为  $A$ 、角频率为  $\omega$ 、波长为  $\lambda$  的相干简谐波在同一  $x$  轴上相向传播.其波动方程为

$$\begin{cases} y_1 = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) \\ y_2 = A \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x\right) \end{cases} \quad (1)$$

相干叠加后形成驻波,驻波方程为

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \cos \omega t \quad (2)$$

假设该两列相干波在密度为  $\rho$  的弹性均匀介质

\* 教育部教指委教学课题,课题编号:DJZW201924ZN-7;基础加强计划技术领域基金项目,项目编号:2019-JCJQ-JJ-090;空军工程大学基础部教育基金“‘为战而教’和‘课程思政’协同实施的大学物理课程教学改革与实践研究”.

作者简介:庞燕(1991-),女,硕士,讲师,主要从事大学物理课程教学工作.

通讯作者:张亮(1987-),男,博士,副教授,主要从事大学物理课程教学和生物电磁方面研究工作.

中传播,则取弹性介质中  $x$  处一小段质元  $dV$ ,其质量  $dm = \rho dV$ . 由式(2)可知该小段质元的振动速度为

$$v = \frac{dy}{dt} = -2A\omega \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \sin \omega t \quad (3)$$

因此,该质元的动能为

$$dE_k = \frac{1}{2}d(mv^2) = 2\rho A^2 \omega^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \sin^2 \omega t dV \quad (4)$$

该质元的弹性势能  $dE_p$  等于该质元的弹性形变势能  $\Delta W_p$

$$\Delta W_p = \int_0^{\Delta y} F dy = \int_0^{\varphi} GS\varphi \Delta x d\varphi = \frac{1}{2}G\varphi^2 \Delta V \quad (5)$$

其中  
为弹性模量

$$G = \frac{F}{S\varphi}$$

$$\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

为介质质元产生的相对形变. 又因为在弹性介质中,弹性模量

$$G = u^2 \rho \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{dy}{dx}$$

因此可得质元的弹性势能  $dE_p$

$$dE_p = \Delta W_p = \int_0^{\Delta y} F dy = \int_0^{\varphi} GS\varphi \Delta x d\varphi = \frac{1}{2}G\varphi^2 \Delta V = 2\rho A^2 \omega^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \cos^2 \omega t dV \quad (6)$$

根据式(4)和式(6)得介质中的能量密度  $w$  和能流密度  $I$  分别为

$$w = \frac{dE}{dV} = \frac{dE_k + dE_p}{dV} = 2\rho A^2 \omega^2 \left( \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda}x \cos^2 \omega t + \cos^2 \frac{2\pi}{\lambda}x \sin^2 \omega t \right) \quad (7)$$

$$I = \frac{dE}{dt dS} = -\rho A^2 \omega^2 u \sin \frac{4\pi}{\lambda}x \sin 2\omega t \quad (8)$$

根据驻波能流密度表达式(8)可以分析得知:

在位置  $x = \frac{k\lambda}{4} (k = \pm 1, 2, 3, \dots)$  时,即驻波波节和波腹位置处,能流密度  $I = 0$ ,表明该位置为能量传输节点,且在该位置前后能流密度反相. 表明驻波能量无法在空间中定向传输,仅在相邻的两个节点之间(波节和波腹之间)转移.

## 2 矩形谐振腔内电磁能流密度分析

如图1所示矩形谐振腔放置于直角坐标系内,腔体尺寸大小为  $a \times b \times c (c > a > b)$ . 根据高等电磁理论<sup>[9]</sup>,矩形谐振腔内电磁波主要分为 TM 模(横磁场)和 TE 模(横电场). 对于 TM 模,可知磁矢位  $\mathbf{A}$  为

$$\mathbf{A} = \Psi \mathbf{u}_z \quad (9)$$

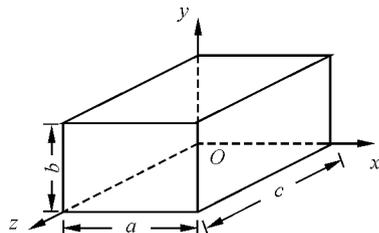


图1 矩形谐振腔结构示意图

式(9)中  $\Psi$  为波函数. 根据谐振腔边界条件:  $z = 0, c, E_x = E_y = 0; x = 0, a, E_y = E_z = 0; y = 0, b, E_x = E_z = 0$ , 求解亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 \Psi + k^2 \Psi = 0 \quad (10)$$

其中  $k$  为波数,可得到矩形谐振腔内 TM 模电磁波的波函数为

$$\Psi_{mnp}^{TM} = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{p\pi z}{c} \quad (11)$$

并根据式(9)及麦克斯韦方程组

$$\mathbf{E} = -j\omega \mu \mathbf{A} + \frac{1}{j\omega \epsilon} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (12)$$

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$$

可求解得到 TM 模电场与磁场的模值为

$$\begin{cases} E_x = A_1 \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{c} \\ E_y = A_2 \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{c} \\ E_z = A_3 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{p\pi z}{c} \\ H_x = B_1 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{p\pi z}{c} \\ H_y = B_2 \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{p\pi z}{c} \\ H_z = 0 \end{cases} \quad (13)$$

其中,  $A_i$  和  $B_i$  均为常数,  $m, n, p$  为整数且波数  $k$  满足

$$k^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{c}\right)^2 \quad (14)$$

同理, 可得矩形谐振腔内 TE 模电场与磁场的模值为 ( $C_i$  和  $D_i$  均为常数)

$$\begin{cases} E_x = C_1 \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{c} \\ E_y = C_2 \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{c} \\ E_z = 0 \\ H_x = D_1 \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{p\pi z}{c} \\ H_y = D_2 \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{p\pi z}{c} \\ H_z = D_3 \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{c} \end{cases} \quad (15)$$

为了简化分析过程, 这里仅考虑 TM 和 TE 模式下的主模, 以 TE 模为例, 必须满足场强不为零且  $H_z \neq 0$  下让  $k$  取值最小的条件, 故可得 TE 模式下主模为  $TE_{101}$  模, 此时有该模式下电场  $E$  和磁场  $H$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= C_2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi z}{c} \mathbf{u}_y \\ \mathbf{H} &= D_1 \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi z}{c} \mathbf{u}_x + \\ &D_3 \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi z}{c} \mathbf{u}_z \end{aligned} \quad (16)$$

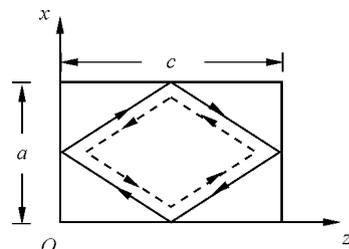
要分析该矩形谐振腔内该模式下电磁波的传播特征, 可参考驻波能流密度分析, 首先计算电磁波的能流密度

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \\ &C_2 D_3 \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi z}{c} \mathbf{u}_x - \\ &C_2 D_1 \sin^2 \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi z}{c} \sin \frac{\pi z}{c} \mathbf{u}_z \end{aligned} \quad (17)$$

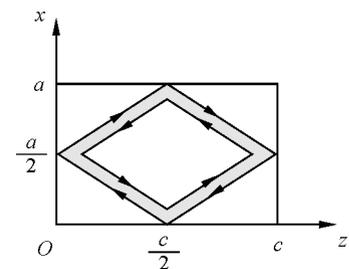
### 3 矩形谐振腔内电磁波传播和能量分析

根据式 (17), 可知  $TE_{101}$  模电磁能量主要在  $xOz$  平面内传输. 能流在  $x$  轴方向上当  $x = \frac{a}{2}$  时为零, 且在  $x = \frac{a}{2}$  两侧反相, 在  $z$  轴方向上当  $z = \frac{c}{2}$  时

为零, 且在  $z = \frac{c}{2}$  两侧反相. 参照驻波的能量分析思路,  $x = \frac{a}{2}$  和  $z = \frac{c}{2}$  与谐振腔壁交点应为电磁能量传输的节点位置, 能量在节点之间转移, 因此矩形谐振腔内  $TE_{101}$  模电磁波主要以驻波形式分布于谐振腔内部各节点之间, 如图 2 所示.



(a) 电磁波传播方向示意图



(b) 驻波能量分布示意图

图 2  $TE_{101}$  模在矩形谐振腔内的传播射线与能量分布示意图

### 4 讨论与总结

参考驻波的能流密度分析思路, 在对矩形谐振腔内其他模式下的电磁传播和能量进行分析时, 主要通过波印廷矢量  $\mathbf{S}$  的表达式来确定能量传输的节点, 明确节点后就可以根据驻波能量传输特征确定该模式下电磁波主要以驻波形式分布于谐振腔内部各节点之间, 并给出相应的传播射线与能量分布示意图. 在分析电磁波传播方向时, 也可以基于电场或磁场的复数形式, 通过复数形式中的波数  $k$  的方向来进行判别. 以  $TE_{101}$  模为例, 首先将式 (16) 改写成复数表达式

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_{y0} \left\{ -\exp \left[ j \left( \frac{\pi x}{a} + \frac{\pi z}{c} \right) \right] + \exp \left[ j \left( \frac{\pi x}{a} - \frac{\pi z}{c} \right) \right] + \right. \\ &\left. \exp \left[ -j \left( \frac{\pi x}{a} - \frac{\pi z}{c} \right) \right] - \exp \left[ -j \left( \frac{\pi x}{a} + \frac{\pi z}{c} \right) \right] \right\} \mathbf{u}_y \\ \mathbf{H} &= H_{x0} \left\{ -\exp \left[ j \left( \frac{\pi x}{a} + \frac{\pi z}{c} \right) \right] - \exp \left[ j \left( \frac{\pi x}{a} - \frac{\pi z}{c} \right) \right] + \right. \end{aligned}$$

$$\exp\left[-j\left(\frac{\pi x}{a} - \frac{\pi z}{c}\right)\right] + \exp\left[-j\left(\frac{\pi x}{a} + \frac{\pi z}{c}\right)\right] \mathbf{u}_x +$$

$$H_{z0} \left\{ \exp\left[j\left(\frac{\pi x}{a} + \frac{\pi z}{c}\right)\right] - \exp\left[j\left(\frac{\pi x}{a} - \frac{\pi z}{c}\right)\right] + \right.$$

$$\left. \exp\left[-j\left(\frac{\pi x}{a} - \frac{\pi z}{c}\right)\right] - \exp\left[-j\left(\frac{\pi x}{a} + \frac{\pi z}{c}\right)\right] \right\} \mathbf{u}_z \quad (18)$$

式(18)中指数有4个取值,表明波数 $k$ 方向有4个:电磁波沿着直线 $x = \pm \frac{a}{c}z$ 传播,这与图2中的传播方向一致。但显然利用波数 $k$ 的方向来进行电磁波传播方向判别相对复杂一些,特别是分析矩形谐振腔内的高次模 $TM_{mnp}$ 或 $TE_{mnp}$ 时,从式(16)很难简单转化成式(18)。相比而言,通过计算能流密度的方式更加便捷。

综上所述,驻波是一种特殊的波动形式,广泛存在于实践应用当中。利用驻波的能量特征,可以对很多复杂问题进行较为便捷的分析。本文基于驻波的能量传输特征,对矩形谐振腔内部电磁场进行分析,进而得到腔体内部不同工作模式下电磁波的传播和能量传输特征。相较于矩形谐振腔一般分析方法,该方法在针对高次模进行分析时

会相对便捷。

### 参考文献

- [1] 尹波,黄倩倩,张晓玲,等. 基于非对称互补开口谐振环的基片集成波导带通滤波器[J]. 电子器件, 2021, 44(5): 1 072-1 077.
- [2] 张瑜,王晓雪,韩明硕,等. 开口微波谐振腔选频能力优化设计[J]. 真空科学与技术学报, 2021, 41(7): 668-673.
- [3] 张欢雷,程礼盛,王安,等. 碳纤维石墨化专用微波矩形槽波导谐振腔的设计及数值模拟[J]. 北京化工大学学报(自然科学版), 2020, 47(5): 104-108.
- [4] Jin Jian ming. 高等电磁场理论[M]. 2版. 尹家贤,译. 北京:电子工业出版社, 2017:4.
- [5] 张三慧. 大学物理学[M]. 北京:清华大学出版社, 2008:9.
- [6] 马文蔚,周雨青,解希顺. 物理学[M]. 6版. 北京:高等教育出版社, 2017.
- [7] 徐宗瑜,胡小克. 驻波的能量分析与MATLAB模拟[J]. 物理通报, 2012(11):31-34.
- [8] 李爱芝,梁文泉,王强,等. 驻波能量及能流密度局部振荡理论探析[J]. 哈尔滨商业大学学报(自然科学版), 2015, 31(3): 362-364.

## Analysis on Electromagnetic Propagation Mode of Rectangular Resonator Based on the Characteristics of Standing Wave Energy

PANG Yan FAN Qi YANG Baiyu WU Xiaoliang MENG Yueyu

(Fundamentals Department, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710051)

ZHANG Liang

(Basic Medical Science Academy, Air Force Medical University, Xi'an, Shaanxi 710032)

**Abstract:** Standing wave is an important concept in university physics and has been widely used in practice. Using the energy characteristics and analysis method of standing wave can efficiently and conveniently analyze and deal with many complex problems in practical application. In this paper, the propagation and energy distribution characteristics of electromagnetic wave in microwave rectangular resonator were analyzed based on the standing wave energy characteristics and analysis method. It can overcome the abstractness and complexity of traditional analysis method, on the other hand, it can also provide important reference for teachers and students to strengthen their understanding of relevant concepts and applications.

**Key words:** university physics; standing wave; energy; rectangular resonator; model