解题思路与技巧

基于“一题多解”促核心素养发展*

马淑红　焦照勇　贾光瑞

（河南师范大学物理学院　河南 新乡　453007）

（收稿日期：2022－04－30）

摘　要：通过对飞机上螺旋桨运动学问题的一题多解，具体展示了求解点的合成运动问题的主要方法，并剖析其特点，旨在通过“一题多解”开阔思路，强化学生多角度分析和灵活解决问题的能力，启迪创新思维，促进科学思维能力的发展，提升核心素养.

关键词：一般运动刚体　点的合成运动　一题多解　创新思维

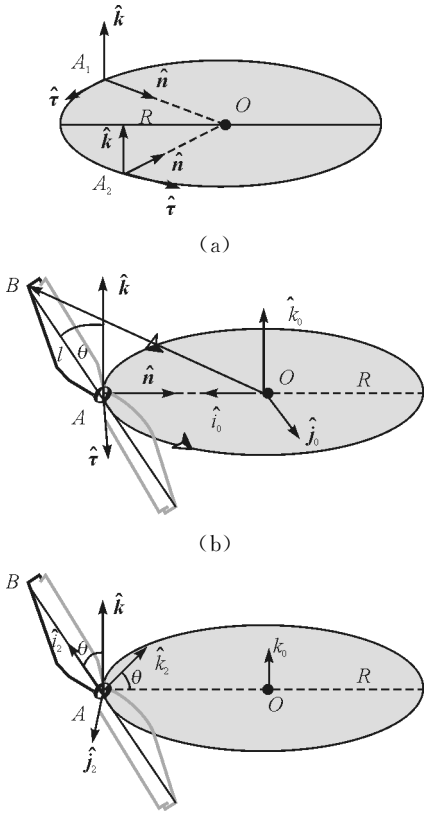
1　引言

点的合成运动是理论力学课程教学的重难点内容之一[1]，许多实际问题涉及的主要是做一般运动的刚体系统，求解这类复杂运动问题需要正确分析运动间关联和运动形式，恰当选取体（动）坐标系，以及灵活运用力学知识和方法. 许多学生在解决问题时主要运用基点法公式，解题方法单一死板，形成了思维定式. 当遇到复杂运动问题时，学生会感到困惑、迷思、无从下手，不利于发散思维和创新思维的发展[4]. 本文基于教学实践，以教材中飞机上螺旋桨运动的典型问题为例[1]，通过“一题多解”多途径探究[2~4]，展示和探讨它对促进学生整合知识、优化方法，灵活运用、融会贯通和物理核心素养发展的作用和重要性.

2　一题多解

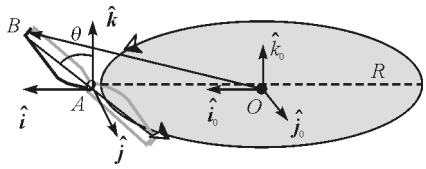
【例题】当飞机在空中以一定值速度 u 沿半径为 R 的水平圆形轨道 O 转弯时，求当螺旋桨尖端 B 与中心 A 的连线和竖直线成 θ 角时，B 点的速度 $\boldsymbol{v}_B$ 及加速度 $\boldsymbol{a}_B$. 已知螺旋桨的长度 $AB=l$，螺旋桨自身旋转的角速度为 $\boldsymbol{\omega}_1$.

所选坐标系如图 1 所示，其中(a) 为固结于机身点 A 的动坐标系 $A-\hat{\boldsymbol{\tau}}\hat{\boldsymbol{n}}\hat{\boldsymbol{k}}$，(b) 为飞机在点 A 转弯时的机身动系 $A-\hat{\boldsymbol{\tau}}\hat{\boldsymbol{n}}\hat{\boldsymbol{k}}$ 和静止坐标系 $O-\hat{\boldsymbol{i}}_0\hat{\boldsymbol{j}}_0\hat{\boldsymbol{k}}_0$，(c) 为解法 2 中建立的机身在点 A 转弯时螺旋桨本体坐标系 $A-\hat{\boldsymbol{i}}_2\hat{\boldsymbol{j}}_2\hat{\boldsymbol{k}}_2$，(d) 为解法 3 中建立的机身动系 $A-\hat{\boldsymbol{i}}\hat{\boldsymbol{j}}\hat{\boldsymbol{k}}$ 和地面静系 $O-\hat{\boldsymbol{i}}_0\hat{\boldsymbol{j}}_0\hat{\boldsymbol{k}}_0$.



* 河南省自然科学基金，基金编号：202300410247；河南省教师教育课程改革研究项目，项目编号：2021－JSJYYB－021；河南省高等教育教学改革研究与实践项目，项目编号：2021SJGLX111

作者简介：马淑红（1974－　），女，教授，主要从事理论力学教学和功能材料计算模拟研究工作.



(d)

图 1　坐标系

运动分析:视螺旋桨为刚体,研究对象是螺旋桨的尖端点 B,其运动分解为:(1) 随同螺旋桨绕过动点 A 的自身中心轴转动[角坐标和角速度分别为 $\theta(t)$ 和 $\boldsymbol{\omega}_1=\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\tau}}$];(2) 机身在水平圆轨道平面内绕定点 O 做匀速率圆周运动(如图 1).

建立机身动坐标系:选机身为动坐标系,螺旋桨中心点 A 为坐标系原点,以点 A 相对于定点 O 运动的切向速度方向、法线方向和副法线方向为坐标轴正向,建立如图 1(a)、(c) 所示的自然坐标系 $A-\hat{\boldsymbol{\tau}}\hat{\boldsymbol{n}}\hat{\boldsymbol{k}}$. 动系原点 A 相对于定点 O 的切向速度 $\boldsymbol{v}_A=u\hat{\boldsymbol{\tau}}$,机身绕点 O 转动角速度 $\boldsymbol{\omega}_0=\frac{u}{R}\hat{\boldsymbol{k}}_o$,点 A 的法向加速度 $\boldsymbol{a}_A=\frac{u^2}{R}\hat{\boldsymbol{n}}$. 因此,单位矢量的瞬时变化率为

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\tau}}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}_0\times\hat{\boldsymbol{\tau}}=\frac{u}{R}\hat{\boldsymbol{n}}\\ \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{n}}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}_0\times\hat{\boldsymbol{n}}=-\frac{u}{R}\hat{\boldsymbol{\tau}}\\ \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{k}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{k}}_0}{\mathrm{d}t}=0\end{cases}\tag{1}$$

解法 1:自然坐标系绝对位矢求导法.

如图 1(b) 所示,螺旋桨尖端点 B 相对于固定点 O 的绝对位矢

$$\boldsymbol{r}_{OB}=\boldsymbol{r}_{AB}+\boldsymbol{r}_{OA}=$$
$$(-l\sin\theta\hat{\boldsymbol{n}}+l\cos\theta\hat{\boldsymbol{k}})-R\hat{\boldsymbol{n}}\tag{2}$$

对式(2) 两边求时间的瞬时变化率,得到点 B 的速度

$$\boldsymbol{v}_B=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{OB}}{\mathrm{d}t}=-R\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{n}}}{\mathrm{d}t}-l\sin\theta\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{n}}}{\mathrm{d}t}-$$
$$l\omega_1\cos\theta\hat{\boldsymbol{n}}+l\cos\theta\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{k}}}{\mathrm{d}t}-l\omega_1\sin\theta\hat{\boldsymbol{k}}\tag{3}$$

应用式(1) 可得:机身在如图 1(c) 位置时点 B 对固定坐标系 $O-\hat{\boldsymbol{i}}_0\hat{\boldsymbol{j}}_0\hat{\boldsymbol{k}}_0$ 的绝对速度

$$\boldsymbol{v}_B=-\omega_1 l\cos\theta\hat{\boldsymbol{n}}+$$
$$u\left(1+\frac{l}{R}\sin\theta\right)\hat{\boldsymbol{\tau}}-l\omega_1\sin\theta\hat{\boldsymbol{k}}\tag{4}$$

类似地,对式(4) 两边求时间的瞬时变化率,并应用式(1),可得点 B 绝对加速度

$$\boldsymbol{a}_B=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_B}{\mathrm{d}t}=\left(\omega_1^2 l\sin\theta+\frac{u^2}{R}+\frac{u^2 l}{R^2}\sin\theta\right)\hat{\boldsymbol{n}}+$$
$$\frac{2u\omega_1 l}{R}\cos\theta\hat{\boldsymbol{\tau}}-l\omega_1^2\cos\theta\hat{\boldsymbol{k}}\tag{5}$$

上述解法是从动点的绝对位矢出发,基于运动学量关系,通过求矢量对时间的瞬时变化率,得出动点的速度和加速度. 该解题方法思路简单,关键在于求动系单位矢量瞬时变化率.

解法 2:刚体运动基点法.

学生解题时对刚体体坐标系的选取也存在一定困惑,为区别于解法 1 中 $A-\hat{\boldsymbol{i}}_1\hat{\boldsymbol{j}}_1\hat{\boldsymbol{k}}_1$ 动坐标系,这里建立了如图 1(c) 所示的体坐标系 $A-\hat{\boldsymbol{i}}_2\hat{\boldsymbol{j}}_2\hat{\boldsymbol{k}}_2$,以螺旋桨中心点 A 为基点,其切向速度 $\boldsymbol{v}_A$ 和加速度 $\boldsymbol{a}_A$ 分别为

$$\boldsymbol{v}_A=u\hat{\boldsymbol{j}}\qquad\boldsymbol{a}_A=\frac{u^2}{R}\cos\theta\hat{\boldsymbol{k}}-\frac{u^2}{R}\sin\theta\hat{\boldsymbol{i}}\tag{6}$$

螺旋桨绕过基点 A 瞬轴转动的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 可分解为:(1) 绕其中心轴 $\hat{\boldsymbol{j}}_2$ 的角速度 $\boldsymbol{\omega}_1=\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{j}}_2=\omega_1\hat{\boldsymbol{j}}_2$;(2) 随机身转弯时绕过 O 点竖直轴转动角速度 $\boldsymbol{\omega}_0=\frac{u}{R}\hat{\boldsymbol{k}}_0$,故有

$$\begin{cases}\boldsymbol{\omega}=\omega_1\hat{\boldsymbol{j}}_2+\frac{u}{R}\hat{\boldsymbol{k}}_0\\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}=\omega_1\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{j}}_2}{\mathrm{d}t}=\omega_1(\boldsymbol{\omega}_0\times\hat{\boldsymbol{j}}_2)=-\frac{\omega_1 u}{R}\hat{\boldsymbol{i}}_2\end{cases}\tag{7}$$

在体坐标系 $A-\hat{\boldsymbol{i}}_2\hat{\boldsymbol{j}}_2\hat{\boldsymbol{k}}_2$ 中,螺旋桨尖端点 B 的位矢表示为:$\boldsymbol{r}_{BA}=l\hat{\boldsymbol{i}}$.

运用刚体基点公式

$$\begin{cases}\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{BA}\\ \boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_A+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r}_{BA}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{BA})\end{cases}$$

可得结果式(8)

$$\begin{cases}\boldsymbol{v}_B=u\left(1+\frac{l}{R}\sin\theta\right)\hat{\boldsymbol{j}}_2-\omega_1 l\hat{\boldsymbol{k}}_2\\ \boldsymbol{a}_B=-\left(\omega_1^2 l+\frac{u^2}{R}\sin\theta+\frac{u^2 l}{R^2}\sin^2\theta\right)\hat{\boldsymbol{i}}_2+\\ \frac{2u\omega_1 l}{R}\cos\theta\hat{\boldsymbol{j}}_2+\left(\frac{u^2}{R}\cos\theta+\frac{u^2 l}{R^2}\sin\theta\cos\theta\right)\hat{\boldsymbol{k}}_2\end{cases}\tag{8}$$

综上，由于坐标轴选取不同，该结果与解法 1 结果表示形式有别；解法 2 中建立的刚体体坐标系更直观明了，其关键是确定刚体绕基点瞬轴转动运动状态.

解法 3：点的合成运动法.

由点的合成运动理论：动点 B 相对于静系的绝对运动（$\boldsymbol{v}_B$、$\boldsymbol{a}_B$）等于其相对动系的相对运动（$\boldsymbol{v}_r$、$\boldsymbol{a}_r$）与动系相对于静系的牵连运动两者的叠加，即

$$\begin{cases}\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}_r+\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{\omega}_A\times\boldsymbol{r}_{BA}\\ \boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_r+\\ [\boldsymbol{a}_A+\dot{\boldsymbol{\omega}}_A\times\boldsymbol{r}_{BA}+\boldsymbol{\omega}_A\times(\boldsymbol{\omega}_A\times\boldsymbol{r}_{BA})]+\\ 2\boldsymbol{\omega}_A\times\boldsymbol{v}_r\end{cases}\tag{9}$$

动、静坐标系的建立：如图 1(d)，建立以圆轨道平面中心点 O 为原点静止坐标系 $O-\hat{\boldsymbol{i}}_o\hat{\boldsymbol{j}}_o\hat{\boldsymbol{k}}_o$，建立以点 A 为原点的机身动坐标系 $A-\hat{\boldsymbol{i}}\hat{\boldsymbol{j}}\hat{\boldsymbol{k}}$. 动系对静系的牵连运动：点 A 平动速度 $\boldsymbol{v}_A=u\hat{\boldsymbol{j}}$、平动加速度 $\boldsymbol{a}_A=-\frac{u^2}{R}\hat{\boldsymbol{i}}$、动系转动角速度 $\boldsymbol{\omega}_A=\frac{u}{R}\hat{\boldsymbol{k}}_o$ 和角加速度 $\dot{\boldsymbol{\omega}}_A=0$.

动点对动系的相对运动：螺旋桨尖端动点 B 相对动系原点 A 的相对位矢、相对速度和相对加速度分别为

$$\begin{cases}\boldsymbol{r}_{BA}=l\sin\theta\hat{\boldsymbol{i}}+l\cos\theta\hat{\boldsymbol{k}}\\ \boldsymbol{v}_r=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{BA}}{\mathrm{d}t}=\omega_1 l(\cos\theta\hat{\boldsymbol{i}}-\sin\theta\hat{\boldsymbol{k}})\\ \boldsymbol{a}_r=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_r}{\mathrm{d}t}=-\omega_1^2 l(\sin\theta\hat{\boldsymbol{i}}+\cos\theta\hat{\boldsymbol{k}})\end{cases}\tag{10}$$

经上述分析计算，可得动点 B 对静系的绝对速度和加速度.

类似地，若建立以螺旋桨中心点 A 为原点的动坐标系[如图 2(b)]，则点 B 相对动系静止（$\boldsymbol{a}_r$ 和 $\boldsymbol{v}_r$ 等于零），解法 3 回归到解法 2.

该方法的关键是动系的建立和相对运动分析[5]，这里分别以机身和螺旋桨动系为例，深化学生对知识理解，加强学生灵活运用和掌握解题方法.

3　解法讨论及对学生创造性思维等核心素养的培养

比较上述解法不难发现：

(1) 刚体基点公式法仅适用于固结于刚体上的点的运动，其余两种方法在求解任意动点的复杂运动问题时更具普适性.

(2) 绝对位矢求导法是最基础的解法，基于动点的绝对位矢，运用求导运算推导出动点的速度和加速度，推理过程简单，学生都能熟练掌握. 该方法有助于培养学生科学的逻辑思维方法和严谨的推理能力，强化求导微分物理思想的渗透，具有与其他方法异曲同工之妙.

(3) 点的合成运动法是基于运动叠加原理来描述点的复杂运动，其运动变换关系为

$$\left|\overbrace{\langle\text{动点}\rangle\text{对动系}}^{\text{相对运动}}\right\rangle\underset{\text{动系对静系}}{\overset{\text{牵连运动}}{\rightleftharpoons}}\left\langle\overbrace{\langle\text{动点}\rangle\text{对静系}}^{\text{绝对运动}}\right|$$

归结为“一点、二系、三运动”，其解题思路清晰，学生易形成解题程序性范式，其关键是正确分析各种运动，是一种普适解法.

上述 3 种解题方法和思路从不同的观点出发，能够开阔学生眼界和思路，促使学生对所学理论知识进行整合和重构，贯通各章节碎片化的知识以达到灵活运用，启迪创新思维，培养学生多途径解决问题的能力. 通过一题多解对问题进行反思，多问多想为什么，弄清物理本质，站在物理观念的角度，运用科学思维和深入分析探究的科学方法，培养学生的发散性和创造性思维，促进核心素养发展.

4　结论

本文运用绝对位矢求导法、刚体基点公式法、点的合成运动法一题多解“飞机上螺旋桨的运动”问题，讨论了各解法的关键和坐标系选取的影响. 旨在通过“一题多解”强化学生对所学理论的融会贯通和解题方法的灵活运用，提高学生解决问题的能力，促进学生创新思维能力的发展.

它能促进学生整合知识、优化方法，灵活运用、触类旁通、融会贯通的教学效果，提高学生解决问题的能力，激发学习物理的积极主动性和创造性思维，促进核心素养发展.

参考文献

1　周衍柏. 理论力学教程(第 4 版)[M]. 北京：高等教育出版社，2018.142

2　余为，郝颖. 点的合成运动中动点的选取方法分类与讨论[J]. 物理与工程，2022(2)：36 ～ 39，49

3　杨芳，周青军，孔伟. 浅谈大学物理“一题多解”培养学生核心素养[J]. 教育教学论坛，2019(11)：238 ～ 239

4　王利刚，杨体强，赵显武. 浅谈大学物理教学中的“一题

（下转第 89 页）

续表 1

注入溶液	纸片到前杯壁的距离 /cm		眼睛到后杯壁的距离 /cm		成像特点
	实验值	对应理论值	实验值	对应理论值	
饱和食盐水	−0.5	$s<f$		−13.09	正立,放大的虚像
	−2.5	$s=f$	$+\infty$	−1 036.74	不成像
	−4.3	$f<s<2f$	12.5	20.41	倒立,放大的实像
	−13.3	$s>2f$	4.5	5.47	倒立,缩小的实像

通过实验与计算得到的理论值进行对比,对于不同位置的成像特点与理论所对应的范围一致,但对于成像位置有较大的误差(在实验中为了减小误差运用了杯壁较薄的塑料杯)、像差等原因导致很难选出最优的图像,所以得到的物距与理论值差距较大.

5　结束语

通过对物理规律的学习,运用科学探究的方法去研究问题,并将其具体应用到实际生活中,有助于促进学生科学探究能力的发展.

费马原理作为几何光学的基本理论,不论对中学生还是大学生,对理解几何光学的物理本质有着非常重要的作用.本文旨在从本质上进一步探讨和说明,费马原理在几何光学学习中的重要性,将其应用到厚透镜物像方程的理论推导,并在居家实验中亲自研究验证,以助于学生更深刻地理解其思想,为后续学习打下扎实的基础.

参 考 文 献

1　张玉峰,陈征,魏红祥,等.物理学认识路径的构建[J].物理,2021(11):782 ~ 784

2　姚启钧.光学教程(第 5 版)[M].北京:高等教育出社,2014.114 ~ 154

3　俞郭遥,鲍成章,朱国强.费马原理解决两过程匀速运动极值问题[J].物理通报,2018(S2):70 ~ 72

4　任雨萌,李艳辉.路径的选择问题 —— 从费马原理看聪明的光[J].物理通报,2017,36(2):58 ~ 59

5　彭湘.用费马原理推导透镜的物像公式[J].大学物理,2002(4):20 ~ 21

6　张相武.再用费马原理推导透镜的物像公式[J].延安大学学报(自然科学版),2004(4):31 ~ 33

7　彭金松.几何光学中近轴条件引入误差的讨论[J].广西物理,1997(3):31 ~ 35

8　廖永容,杨晓梅,肖瑜.圆柱状透镜的趣味实验原理分析[J] 物理教师,2018,39(9):56 ~ 58

9　时益江.作图与实验结合揭开柱形凸透镜奥秘[J].中学物理(初中版),2020,38(7):29 ~ 30

(上接第 85 页)

多解"[J]. 教育教学论坛, 2014(36):76 ~ 77

5　杨志万.从一题多解谈球对称静电场的解析方法[J]. 高师理科学刊,2009(3): 96 ~ 100

Promoting the Development of Core Accomplishment Based on *Multiple Solutions to One Problem*

Ma Shuhong　Jiao Zhaoyong　Jia Guangrui

(School of Physics, Henan Normal University, Xinxiang, Henan　453007)

Abstract: Three different methods are as an illustration applied to a typical case of aeroplane propeller, to solve the kinematics of a moving point of a rigid body in the general motion. And the characteristics of various solutions are discussed. By means of multi-solutions to a problem in physics learning, students can benefit more as to improve their problem-solving skills, develop their scientific thinking abilities and inspire their creative thinking as well.

Key words: general motion of a rigid body; resultant motion of a point; multi-solutions to a problem; creative thinking