

# 从一道上海高考题谈起

——通过单摆测万有引力常量  $G$

许方杰

(复旦大学附属中学 上海 200433)

(收稿日期:2022-05-10)

**摘要:**从2021年上海市一道物理高考题说起,简单叙述通过单摆测量万有引力常量  $G$  的历史.从最早17世纪牛顿提出想法,接着18世纪的谢赫伦实验,到最近的双单摆  $F-P$  腔法,简略向读者介绍单摆测  $G$  的发展历程.

**关键词:**高考;单摆;万有引力常量

2021年高考上海物理卷出现了一道通过单摆测量万有引力常量  $G$  的填空题.这道题教师和学生都觉得有争议,大家觉得小物体间的万有引力非常弱,当年卡文迪什通过精密扭秤实验才巧妙地测出  $G$  值<sup>[1]</sup>,所以不太可能简单地通过单摆测量.笔者通过分析这道高考题,查阅早期文献,向大家简单讲述单摆测量万有引力常量  $G$  的历史.

## 1 一道上海高考物理题

2021年高考上海市物理卷最后一道填空题:如图1所示,在测量引力常量  $G$  的实验中,小球(可视为质点)偏离竖直方向一个小角度  $\theta$ ,两球心之间距离为  $r$ ,质量为  $M$  的均匀圆球快速移开后,小球运动\_\_\_\_\_ (选填“可以”或“不可以”) 视为简谐运动;测量  $r$ 、 $M$ 、 $d$  和小球的振动周期  $T$ ,则  $G = \underline{\hspace{2cm}}$ . (当  $\theta$  很小时,  $\sin \theta \approx \tan \theta$ )

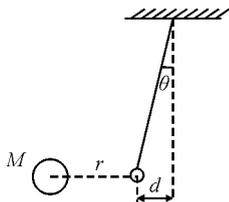


图1 题图

**解析:**可以做简谐运动.对于第二个空,由受力分析图(图2)得

$$F = G \frac{Mm}{r^2} = mg \tan \theta$$

$$G = \frac{gr^2}{M} \tan \theta \approx \frac{gr^2}{M} \sin \theta$$

由题知

$$\sin \theta = \frac{d}{l} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

得

$$G = \frac{4\pi^2 r^2 d}{MT^2}$$

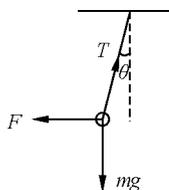


图2 小球受力分析图

这道题中的想法初看不太可行,按照常识估算:  $\sin \theta = \frac{GM}{gr^2}$ ,  $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ , 设大球质量  $M = 100 \text{ kg}$ ,  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ , 两球心距离  $r = 0.13 \text{ m}$  (按照铅球密度计算,小球无限接近大球,距离最近),可以计算得  $\sin \theta = 4 \times 10^{-8}$ ,  $\theta = 2.29 \times 10^{-6}^\circ$ . 这样小的角度让人感觉不可测量.

## 2 牛顿的想法以及18世纪的谢赫伦实验

难道这个题完全是想象的吗,如果我们考虑把大球质量变大很多,是不是这个小角度可以测量?其实早在1687年,牛顿在那本著名的《自然哲学的数学原理》书第528页提出:“如果有一座半球状的山,三英里高,六英里宽,摆线与竖直方向相比会出现大约  $2'$  的偏角”<sup>[2]</sup>,严格来说应该是  $1'18''$  (假设山

的密度和地球密度相同)<sup>[8]</sup>. 但是由于  $2'$  实在太小, 牛顿自己也说不太可能测量 (Whole mountains will not be sufficient to produce any sensible effect)<sup>[2]</sup>. 可能因为这句话导致几十年间没有科学家去尝试这个实验. 凭借物理学常识我们可知, 这么小的角度必定要借助天体物理的帮助. 第一个重要的尝试在 1738 年, 天文学家皮埃尔·布格在钦博拉索山进行实验<sup>[4]</sup>, 发现摆线偏转角度大约有  $7.5''$ , 但是由于设备所限没有进行其他精细测量, 也没有定量计算. 虽然没有系统的实验, 但这次测量也很重要, 证明了牛顿想法的可行性<sup>[5]</sup>.

直到 1778 年, 天文学家马斯基林在榭赫伦山开展系统的实验<sup>[6]</sup> (Schiehallion Experiment). 榭赫伦山高 1 083 m, 形状比较规则, 东西对称, 而且南北比较陡峭, 另外周围空旷没有其他山的影响, 这样方便计算. (论文电子版在 JSTOR<sup>[7]</sup>, 近 250 年前的文章, 文字模糊识别版本中较多拼写错误)

实验总体思路如图 3 所示<sup>[5]</sup>, 原图中英文手写体为 Sillitto, R. M. 的原文, 中文印刷体是笔者为方便读者阅读增加的注释.

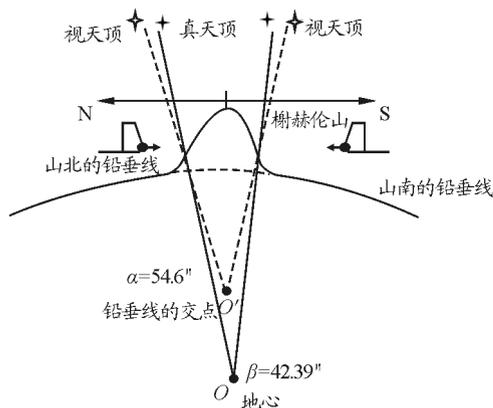


图 3 榭赫伦实验示意图

首先马斯基林测出山南与山北的视天顶的距离 (以铅垂线为准测得的天顶, 图中虚线星表示), 从而测出山南山北视天顶间偏角, 图中为  $\alpha = 54.6''$  (虚线夹角). 为了得到铅垂线偏转角度, 还需测量山南山北的真天顶间夹角  $\beta = 42.94''$  (图中黑色星表示, 黑色实线表示真天顶到地心, 这个  $\beta$  角也与山南山北纬度差值相等). 马斯基林把视天顶夹角和真天顶夹角相减, 得出山南北两地的铅垂线偏角和为

$11.6''$ <sup>[5]</sup>. 这个结果也表明, 如果在山的一侧测量, 铅垂线大约偏转  $5.8''$ <sup>[3]</sup>. 在 Smallwood 的论文中有更详细的示意图<sup>[4]</sup>, 但是更为复杂一些. 榭赫伦实验总体思路虽简单, 但整个实验过程非常复杂, 具体的过程可以看文献<sup>[6, 8]</sup>, 详细计算见文献<sup>[4, 9]</sup>, 整个实验彻底完成花了近 3 年时间. 马斯基林做这些实验时非常严谨, 对团队管理严格. 据说当年他的助手解方程时, 算出来的时间比他本人的大了  $0.5$  s, 就被他开除了<sup>[3]</sup>.

在当时, 榭赫伦实验的目的是为了获得地球的平均密度, 这个数值在当时非常重要, 知道地球密度就可估算太阳系其他天体密度. 直到 100 多年后才有科学家提出万有引力常量  $G$  的概念<sup>[10]</sup>. 按照当时榭赫伦实验得出的地球平均密度  $4.5 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup><sup>[6]</sup>, 可以计算出万有引力常量  $G$  值, 这个值与现代值约 20% 的误差. 这里的误差主要不是实验本身所致, 当年实验涉及的天文测量非常精准<sup>[4]</sup>. 榭赫伦实验后又有很多科学家做类似的实验, 原理还是依靠山体吸引单摆测铅锤线偏角, 但是得到的  $G$  值误差都较大. 后来科学研究发现, 主要是因为这些实验难以考虑地球上远处其他较大物体的引力影响, 而这些影响会导致显著的误差<sup>[5]</sup>.

### 3 现代版单摆测万有引力常量 $G$ 的实验

上面的榭赫伦实验, 是通过天文物理把极微小的角度测出来. 随着现代物理学的快速发展, 各种测量工具日新月异, 用各种新式扭秤、冷原子干涉法等来测量  $G$ <sup>[11-12]</sup>. 现代实验已经可以做到在室内用重物吸引单摆来测量  $G$ . 1991 年, Schurr 等人提出用双单摆法来测量  $G$ <sup>[13]</sup>. 基本原理如图 4 所示.

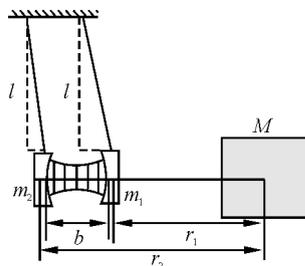


图 4 双单摆测  $G$  实验示意图

悬挂于两根等长  $l$  相距一定间距的镀金凹面镜

$m_1$  和  $m_2$  作为单摆,两者之间距离为  $b$ ,在右侧用物体  $M(125\text{ kg})$  作为吸引质量.由于  $M$  和两个单摆的距离  $r_1$  和  $r_2$  不同,吸引力不同,导致两个单摆偏转角度不同.没有吸引质量和有吸引质量时, $b$  值会出现变化.这个方法里最重要的是测  $b$  值的变化量,这个数据非常小,只有几十纳米<sup>[13]</sup>.准确测量  $b$  值是这个实验中的关键部分,主要方法是使用法布里-佩罗干涉仪(Fabry - Pérot interferometer<sup>[14]</sup>),所以也称为 F - P 腔法.因为两个单摆是凹面镜,微波可在两个单摆间多次反射然后干涉,可测量微小距离变化<sup>[14]</sup>,两个单摆就构成了 F - P 干涉腔.通过测量 F - P 腔内微波共振频率的改变得到  $b$  的改变量,从而计算出  $G$ ,详细计算可看文献[15].在2011年,Harold V. Parks把这个实验做得更精准<sup>[16]</sup>,他们使用激光替代微波进行实验,激光波长比微波要短得多,所以实验结果更加准确.该实验得到  $G$  值被国际科技数据委员会(CODATA,致力于基本物理学常数的评估工作)所收录.

#### 4 总结

从最早17世纪牛顿提出这个想法,接着是榭赫伦实验,到最近的双单摆 F - P 腔法,我们可以很清楚地看到用单摆测量万有引力常量  $G$  不仅是可行的,而且随着科技的发展测得的  $G$  值已经非常准确.那为什么这个高考题给老师和同学们带来困扰,主要原因是题目过于简化,让人觉得随使用一个单摆就可以测得  $G$  值.实际上现在的实验是在真空中进行<sup>[13, 15, 16]</sup>,需使用非常精密的法布里-佩罗干涉仪.即使是在18世纪完成的实验,也需要非常精密的天文测量.这个试题本身科学性没有问题,笔者建议在题目上再加一两句实验条件增加题目的科学完整性.

感谢复旦大学附属中学王美芳老师、张秀梅老师的有益讨论.

#### 参考文献

- [1] CAVENDISH H, XXI. Experiments to determine the density of the earth[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1798, 88:469 - 526.
- [2] NEWTON. Mathematical Principles of Natural Philosophy[M]. Translated: Andrew Motte, New York: Kessinger Publishing, 1846:241.
- [3] DAVIES R. A Commemoration of Maskelyne at Schiehallion[J]. *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society*, 1985, 26:289.
- [4] SMALLWOOD J. R. Maskelyne's 1774 Schiehallion experiment revisited[J]. *Scottish Journal of Geology*, 2007, 43 (1):15 - 31.
- [5] SILLITTO R. M. Maskelyne on Schiehallion: A Lecture to the The Royal Philosophical Society of Glasgow[R]. 1990.
- [6] MASKELYNE N. XLIX. An account of observations made on the mountain Schehallien for finding its attraction[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1775(65):500 - 542.
- [7] An Account of Observations Made on the Mountain Schehallien for Finding Its Attraction[EB/OL]. [https://www.jstor.org/stable/106220?seq=2#metadata\\_info\\_tab\\_contents](https://www.jstor.org/stable/106220?seq=2#metadata_info_tab_contents)
- [8] HUTTON C. An Account of the Calculations Made from the Survey and the Measures Taken at Schehallien, in Order to Ascertain the Mean Density of the Earth[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1778, 68 : 689 - 788.
- [9] Schiehallion Experiment [EB/OL]. [https://en.jinzhao.wiki/wiki/Schiehallion\\_experiment](https://en.jinzhao.wiki/wiki/Schiehallion_experiment)
- [10] CORNU A B, J. B. New Determination of the Constant of Attraction and the Average Density of Earth[J]. *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, 1873,76:954 - 958.
- [11] 涂良成,黎卿,邵成刚,等.万有引力常数  $G$  的精确测量[J]. *中国科学:物理学、力学、天文学*, 2011,41 (6):15.
- [12] XUE C, LIU J P, LI Q, et al. Precision measurement of the Newtonian gravitational constant[J]. *国家科学评论:英文版*, 2020, 7 (12):15.
- [13] SCHURR J, KLEIN N, MEYER H, et al. A new method for testing Newton's gravitational law[J]. *Metrologia*, 1991, 28 (5):397.
- [14] F - P interferometer[EB/OL]. [https://en.jinzhao.wiki/wiki/Fabry%E2%80%93P%C3%A9rot\\_interferometer](https://en.jinzhao.wiki/wiki/Fabry%E2%80%93P%C3%A9rot_interferometer).
- [15] KLEINEVOSS U, MEYER H, SCHUMACHER A, et al. Absolute measurement of the Newtonian force and a determination of  $G$ [J]. *Measurement Science and Technology*, 1999, 10 (6):492.
- [16] PARKS H V, FALLER J E. Simple Pendulum Determination of the Gravitational Constant[J]. *Physical Review Letters*, 2010, 105 (11):110801.

(下转第122页)

子的拉力变小

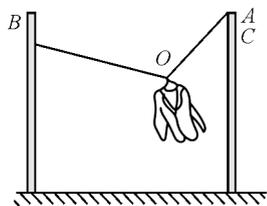


图5 例4题图

解析:

A. 绳子的质量及绳与衣架挂钩间摩擦均忽略不计,挂钩相当于小动滑轮,两侧的拉力一定相等,选项 A 错误.

B. 无风时,根据几何关系可得,  $\sin \theta = \frac{d}{l}$ , 有风时如图 3 所示,  $\sin \alpha = \frac{d \sin \beta}{l}$ , 故有风时  $\angle AOB = 2\alpha$

一定小于  $2\theta$ , 所以选项 B 错误.

C. 无风时,衣服受到重力和两边绳子的拉力处于平衡状态,如图 2 所示,同一条绳子拉力相等,则挂钩左右两侧绳子与竖直方向的夹角相等,选项 C 正确.

D. 当在有风的情况下,如图 4 所示,将绳子的端点从 A 点移到 C 点时,相对于新的等效“晾衣架”,相当于两根杆的间距(小于  $d'$ ) 在减小,即两段绳子之间的夹角变小,重力和风力的合力  $F_{\text{合}}$  不变,所以绳的拉力  $F$  减小, D 正确.

答案: C, D.

综上所述,若要求有水平风力  $F$  作用时绳的拉力,先求出风力  $F$  与重力的合力  $F_{\text{合}}$ , 然后过两个绳的固定点作  $F_{\text{合}}$  的平行线,再求出两条平行线间的等效距离  $d'$ , 由式(2) 很快求得答案.

## Discussion on the Balance of “Clothes Hanger”

XIAO Qiang

(Pingxiang Experimental High School, Pingxiang, Jiangxi 337000)

XIE Yuliang

(Daqing Tieren Senior High School, Daqing, Heilongjiang 163411)

**Abstract:** Firstly, the dynamic balance law of the “clothes hanger” model when there is no wind is derived and summarized, and then combined with the guiding ideology of the new college entrance examination, the dynamic balance law of the “clothes hanger” model when there is wind is derived by using the “equivalent gravity method”.

**Key words:** “clothes hanger”; balance; discuss

(上接第 119 页)

## The Discussion Starting from a Question in Shanghai College Entrance Examination

——Measuring the Universal Gravitation Constant  $G$  Using Simple Pendulum

XU Fangjie

(High School Affiliated to Fudan University, Shanghai 200433)

**Abstract:** Starting from a physics college entrance examination question in Shanghai in 2021, this paper briefly describes the history of measuring the universal gravitational constant  $G$  using simple pendulum. From Newton's idea in the 17th century, the Scherren experiment in the 18th century, to the recent double simple pendulum F-P cavity method, it briefly introduces the development process of measuring  $G$  with single pendulum.

**Key words:** college entrance examination; simple pendulum; universal gravitational constant