巧设参考系解非等质量多星问题

谢永豪　　皮飞鹏
（广州大学物理与材料科学学院　广东 广州　510006）
（收稿日期:2022－05－22）

摘　要:高中物理考查的多星系统围绕某一固定点旋转,各星体的相对位置不发生变化且角速度相同.本文通过变换参考系的方法处理非等质量的三星问题,为多星问题的解决提供一种思路.

关键词:多星问题;非惯性系;质心

在天体运动中由多个星体构成的系统称为多星系统,天文观测表示,经过漫长的演化,多星系统内星体的质量和星体之间的距离会发生变化,但在高中阶段,总认为星体之间的相对位置不发生变化[1].在这一前提下,多星系统的星体位置对称且以同一固定点为圆心做角速度相同的圆周运动,这是其保持稳定的必要条件[2].多星问题是高考和物理竞赛都会考查的题型,对高中生具有一定的挑战性.非等质量的三星问题属于其中的难题,本文对一道非等质量三星问题展开探讨,运用变换参考系的方法进行解答,为多星问题的解决提供一种思路.

1　问题分析

【例1】如图1所示,由质量分别为m_A、m_B、m_C的星体A、B、C组成三星系统,忽略其他星体的作用,它们在相互之间的万有引力作用下,在同一平面上围绕某一共同的圆心O做相同角速度的圆周运动.已知星体分别位于等边三角形的3个顶点,等边三角形的边长为a,试求各星体所受合力大小F_A、F_B、F_C,轨道半径长度R_A、R_B、R_C,线速度大小v_A、v_B、v_C和周期T.

分析题目,已知各星体的质量与它们之间的位置关系,求解各星体的向心力大小、轨道半径和周期.由于该三星系统的星体质量不相等,求解它们的向心力来切入问题会较为复杂.但如果我们能求得星体做圆周运动的角速度大小ω和它们的轨道半径长度R_A、R_B、R_C,其他的物理量就可以通过简单的计算得到,因而我们可以寻找角速度大小和轨道半径长度的求解方法来解题.

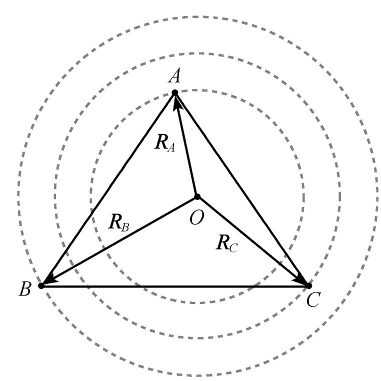

图1　非等质量三星问题

2　巧设参考系求解角速度大小和轨道半径长度

2.1　选取其中一星体为参考系求解角速度大小

当以星体C作为参考系时,星体A和B相对星体C仍然做角速度大小为ω的匀速圆周运动.这个结论可以通过以下证明得到.

以圆心O为参考系时,星体B的速度为$\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R}_B$,星体$C$的速度为$\boldsymbol{v}_C=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R}_C$.而以星体$C$为参考系时,星体$B$的速度为$\boldsymbol{v}_B'$,设星体$B$相对星体$C$做角速度为$\boldsymbol{\omega}'$的匀速圆周运动,则$\boldsymbol{v}_B'=\boldsymbol{\omega}'\times\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{\omega}'\times(\boldsymbol{R}_B-\boldsymbol{R}_C)$.根据伽利略速度变换,$\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}_B'+\boldsymbol{v}_C$,将$\boldsymbol{v}_B$、$\boldsymbol{v}_B'$、$\boldsymbol{v}_C$代入式子,得$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R}_B=\boldsymbol{\omega}'\times(\boldsymbol{R}_B-\boldsymbol{R}_C)+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R}_C$,整理有$\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{R}_B-\boldsymbol{R}_C)=\boldsymbol{\omega}'\times(\boldsymbol{R}_B-\boldsymbol{R}_C)$.

作者简介:谢永豪(1999－　),男,在读硕士研究生,研究方向为学科教学(物理).
通讯作者:皮飞鹏(1965－　),男,副教授,主要研究方向为中学物理课程与教学研究.

因此可证得 $\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}$.

实际上稳定状态的多星系统与刚体运动的规律相同,它们绕旋转圆心的角速度即刚体的角速度,而刚体平面运动中刚体的角速度与基点选择无关. 我们可以运用这个结论求解角速度大小.

选取星体 C 为参考系,星体 B 仍然在做角速度为 ω 的匀速圆周运动,因而其合力方向指向星体 C,如图 2 所示. 由于星体 C 绕圆心 O 做匀速圆周运动,为平动非惯性参考系,此时对星体 B 进行受力分析时要考虑惯性力 F^*. 其中星体 B 的惯性加速度与星体 C 的加速度 a_C 等大反向,而星体 C 的加速度 a_C 由星体 A 和星体 B 对它的引力提供,因此可得

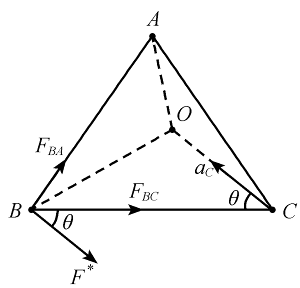

图 2　受力分析

对星体 C 分析:沿 BC 方向

$$\frac{Gm_A m_C}{a^2}\cos 60° + \frac{Gm_B m_C}{a^2} = m_C a_{Cx}$$

对星体 B 分析

$$F_B' = \frac{Gm_A m_B}{a^2}\cos 60° + \frac{Gm_C m_B}{a^2}F^*\cos\theta = m_B\omega^2 a$$

$$F^*\cos\theta = m_B a_{Cx} = \frac{m_B}{m_C}\left(\frac{Gm_A m_C}{a^2}\cos 60° + \frac{Gm_B m_C}{a^2}\right)$$

通过计算可求得星体围绕旋转圆心的角速度大小

$$\omega = \sqrt{\frac{G(m_A + m_B + m_C)}{a^3}}$$

2.2　建立直角坐标系求质心位置即得到旋转圆心位置

多星系统的旋转圆心在其质心位置,因而求质心位置后可通过勾股定理得到各星体轨道半径长度. 以下通过求质心位置和旋转圆心位置来证明这个结论.

如图 3 所示,以某时刻的星体 B 为坐标原点建立直角坐标系,可知 A 点坐标为 $\left(\frac{1}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$, B 点坐标为 $(0,0)$, C 点坐标为 $(a,0)$. 设质心 O 的坐标为 (x_0, y_0),则可计算得到

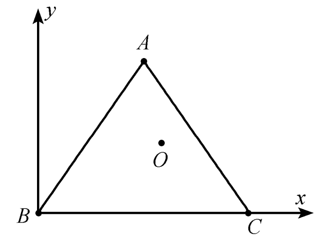

图 3　建立直角坐标系求质心位置

$$x_0 = \frac{\sum_i m_i x_i}{m} = \frac{m_A x_A + m_B x_B + m_C x_C}{m_A + m_B + m_C} = \frac{\frac{1}{2}m_A a + m_C a}{m_A + m_B + m_C}$$

$$y_0 = \frac{\sum_i m_i y_i}{m} = \frac{m_A y_A + m_B y_B + m_C y_C}{m_A + m_B + m_C} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}m_A a}{m_A + m_B + m_C}$$

因而质心 O 的坐标为

$$\left(\frac{\frac{1}{2}m_A a + m_C a}{m_A + m_B + m_C}, \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}m_A a}{m_A + m_B + m_C}\right)$$

接着利用两向心力直线的交点求旋转圆心的坐标. 首先对星体 B 受力分析

$$F_{Bx} = \frac{Gm_A m_B}{a^2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{Gm_C m_B}{a^2}$$

$$F_{By} = \frac{Gm_A m_B}{a^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

因而 F_B 所在直线的方程为

$$y_B = \frac{F_{By}}{F_{Bx}}(x - 0) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}m_A}{\frac{1}{2}m_A + m_C}x$$

同理对星体 C 受力分析

$$F_{Cx} = \frac{Gm_A m_C}{a^2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{Gm_B m_C}{a^2}$$

$$F_{Cy} = \frac{Gm_A m_C}{a^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

因而 F_C 所在直线的方程为

$$y_C = -\frac{F_{Cy}}{F_{Cx}}(x - a) = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}m_A}{\frac{1}{2}m_A + m_B}x +$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}m_A}{\frac{1}{2}m_A+m_B}a$$

设旋转圆心的坐标为(x_1,y_1)，令$y_B=y_C$，有

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}m_A}{\frac{1}{2}m_A+m_B}x_1=-\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}m_A}{\frac{1}{2}m_A+m_B}x_1+\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}m_A}{\frac{1}{2}m_A+m_B}a$$

所以
$$x_1=\frac{\frac{1}{2}m_Aa+m_Ca}{m_A+m_B+m_C}$$

将x_1代入$y_B=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}m_A}{\frac{1}{2}m_A+m_C}x$，则有

$$y_1=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}m_Aa}{m_A+m_B+m_C}$$

于是得旋转圆心坐标为

$$\left(\frac{\frac{1}{2}m_Aa+m_Ca}{m_A+m_B+m_C},\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}m_Aa}{m_A+m_B+m_C}\right)$$

和质心坐标相同，证明完毕.

实际上多星系统的质心位置在星体旋转圆心处，是其能稳定存在的重要条件. 如果多星系统的质心不在旋转圆心处，那么质心应围绕旋转圆心做匀速圆周运动，则多星系统的动量在不断发生变化. 而多星系统忽略其他星体的作用力，即系统不受外力，系统的动量应不变，上述假设与之相违背.

此方法还可用于讨论 3 个星体能否呈任意三角形分布，可证明只有 3 个星体分别位于等边三角形的3个顶点上，或3个星体位于同一直线上且两个相同质量的星体围绕中央星体做半径相同的匀速圆周运动，三星系统才能稳定存在. 这提醒着我们出题时一定要建立在客观事实的基础上，不能凭空编造.

因而通过建立直角坐标系求质心位置$\left(\dfrac{\sum_i m_ix_i}{m},\dfrac{\sum_i m_iy_i}{m}\right)$，随后根据坐标利用勾股定理求得各星体的轨道半径长度R_A、R_B、R_C.

2.3　利用角速度大小和轨道半径长度求解其他物理量

求得角速度大小和轨道半径后，各星体所受合力大小$F_i=m_i\omega^2R_i$，线速度大小$v_i=\omega R_i$，周期$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$就可以通过简单运算求得.

3　解法应用

3.1　解非等质量双星问题

【例 2】如图 4 所示，“食双星”是指在相互引力作用下绕连线上 O 点做匀速圆周运动，彼此掩食(像太阳遮住月亮)而造成亮度发生周期性变化的两颗恒星. 在地球上通过望远镜观察这种双星，视线与双星轨道共面. 观测发现每隔时间 T 两颗恒星与望远镜共线一次，已知两颗恒星 A、B 间距为 d，引力场常量为 G，试推算出两颗恒星的总质量.

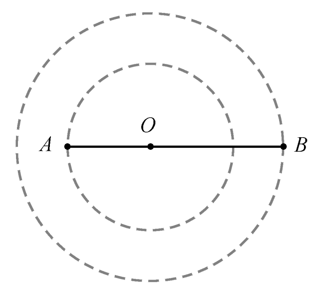

图 4　“食双星”示意图

解析：以星体 B 为参考系时，星体 A 做角速度大小为 ω 的匀速圆周运动. 星体 B 是平动非惯性系，此时对星体 A 进行受力分析需考虑惯性力，其中星体 A 的惯性加速度与星体 B 的加速度等大反向，因此可得

$$F_1'=\frac{Gm_Bm_A}{d^2}+m_Aa_B=m_A\omega^2d$$

$$a_B=\frac{1}{m_B}\frac{Gm_Am_B}{d^2}$$

所以
$$\omega=\sqrt{\frac{G(m_A+m_B)}{d^3}}$$

由题意可知该双星系统一个周期内与望远镜共线 2 次，且

$$T=\frac{\pi}{\omega}=\pi\sqrt{\frac{d^3}{G(m_A+m_B)}}$$

所以
$$m_A+m_B=\frac{\pi^2d^3}{GT^2}$$

3.2　解非等质量三星问题

【例 3】如图 5 所示，由 3 颗星体构成的系统，忽略其他星体对它们的作用，其中有一种运动形式：3 颗星体在相互之间的万有引力作用下，分别位于等

边三角形的 3 个顶点上,绕某一共同的圆心 O 在三角形所在平面内做相同角速度的圆周运动. 若星体 A 质量为 $2m$,星体 B、C 质量均为 m,三角形边长为 a,求:(1) 星体 A 所受合力大小 F_A;(2) 星体 B 所受合力 F_B;(3) 星体 C 的轨道半径 R_C;(4) 三星体做圆周运动的周期 T.

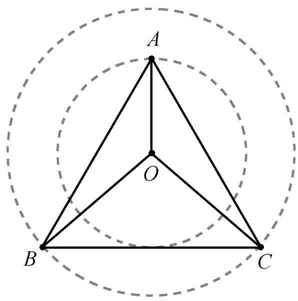

图 5　呈等边三角形分布的三星系统

解析:以星体 C 为参考系时,星体 B 做角速度大小为 ω 的匀速圆周运动. 星体 C 是平动非惯性系,此时对星体 B 进行受力分析需考虑惯性力,其中星体 B 的惯性加速度与星体 C 的加速度 a_C 等大反向,而星体 C 的加速度 a_C 由星体 A 和星体 B 对它的引力提供,可得

$$F_B{}' = F_{AB}\cos 60° + F_{CB} + m_B a_{Cx} = m_B\omega^2 a$$

$$a_{Cx} = \frac{1}{m_C}(F_{AC}\cos 60° + F_{BC})$$

$$2\frac{Gm^2}{a^2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{Gm^2}{a^2} + \frac{1}{1}\left(2\frac{Gm^2}{a^2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{Gm^2}{a^2}\right) = m\omega^2 a$$

所以 $$\omega = 2\sqrt{\frac{Gm}{a^3}}$$

如图 6 所示,以某时刻的星体 B 为坐标原点建立直角坐标系,可知 A 点坐标为$\left(\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$,$B$ 点坐标为$(0,0)$,C 点坐标为$(a,0)$. 设质心 O 的坐标为(x_0, y_0),则可列出以下式子

$$x_0 = \frac{m_A x_A + m_B x_B + m_C x_C}{m_A + m_B + m_C} =$$

$$\frac{2m\cdot\frac{a}{2} + m\cdot 0 + m\cdot a}{2m + m + m} = \frac{a}{2}$$

$$y_0 = \frac{m_A y_A + m_B y_B + m_C y_C}{m_A + m_B + m_C} =$$

$$\frac{2m\cdot\frac{\sqrt{3}a}{2} + m\cdot 0 + m\cdot 0}{2m + m + m} = \frac{\sqrt{3}a}{4}$$

由于质心与旋转圆心共点,旋转圆心 O 的坐标为 $\left(\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}a}{4}\right)$,根据勾股定理可求得

$$R_A = \frac{\sqrt{3}}{4}a \quad R_B = \frac{\sqrt{7}}{4}a \quad R_C = \frac{\sqrt{7}}{4}a$$

根据角速度大小和各星体轨道半径长度可得

(1) $F_A = m_A\omega^2 R_A = 2\sqrt{3}\,\frac{Gm^2}{a^2}$

(2) $F_B = m_B\omega^2 R_B = \sqrt{7}\,\frac{Gm^2}{a^2}$

(3) $R_C = \frac{\sqrt{7}}{4}a$

(4) $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{a^3}{Gm}}$

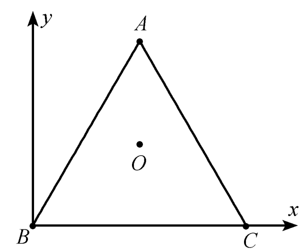

图 6　利用直角坐标系求质心 O 的坐标

4　总结

对于非等质量多星问题,本文运用变化参考系的方法提供了一种解题思路:

(1) 选取其中一星体为参考系时,星体的角速度大小不变,在非惯性系下对另一星体受力分析可直接求得角速度大小;

(2) 多星系统的质心位置即旋转圆心位置,因而求质心位置后可通过勾股定理得到各星体轨道半径长度.

求得角速度大小和各星体轨道半径长度,可使其他物理量的计算变得简单. 巧设参考系解非等质量多星问题逻辑清晰,化繁为简,为此类问题的解决拓展思路.

参 考 文 献

[1] 高尚. 多星问题的简明解法[J]. 物理教学,2016,38(1):50－51.

[2] 郭今戈. 非等质量的多星系统及黑洞问题探讨[J]. 物理教师,2017,38(2):72－74.