匀变速曲线运动的矢量规律及其应用

郑　金

（凌源市职教中心　辽宁 朝阳　122500）

（收稿日期：2022－07－06）

摘　要：归纳了匀变速曲线运动的几个矢量公式及其物理意义；通过与平抛运动的几个结论进行类比，归纳了一般化的匀变速曲线运动的几个有趣的结论，直接利用这些矢量规律巧妙解答几道物理题．

关键词：匀变速曲线运动；斜交分解法；矢量三角形；结论

匀变速直线运动是匀变速曲线运动的特殊情形，必然遵循某些共同的规律．可以证明[1]，若把匀变速直线运动公式写成矢量形式，则适用于加速度恒定的曲线运动．由此可知，匀变速曲线运动的矢量规律包括速度矢量公式、位移矢量公式、速度变化量公式、平均速度矢量公式、速度平方与位移矢量关系式，此外还有一些关于矢量的特殊结论．

1　归纳匀变速曲线运动的矢量规律

1.1　矢量公式与矢量三角形

速度公式写成矢量式为 $\boldsymbol{v}_t=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{a}t$．这表明，匀变速曲线运动的末速度等于初速度与自由加速运动末速度的矢量和，因此匀变速曲线运动可分解为初速度方向的匀速直线运动与加速度方向的自由加速运动，根据平行四边形定则可画出速度矢量平行四边形，这种分解方法称为斜交分解法．由于初速度矢量与末速度矢量不共线，则 3 个速度矢量可构成三角形 PCD 如图 1 所示．实际上，矢量三角形与平行四边形是统一的，把矢量平行四边形中的一个矢量进行平移，即可得到矢量三角形．

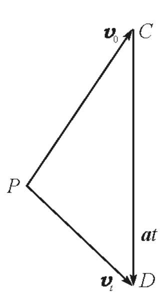

图 1　速度矢量三角形

速度变化量写成矢量式为 $\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_t-\boldsymbol{v}_0$，可变形为速度矢量式 $\boldsymbol{v}_t=\boldsymbol{v}_0+\Delta\boldsymbol{v}$．由此可画出速度矢量三角形 PCD 如图 2 所示．利用这个速度矢量三角形可确定速度变化量的方向．此外，由牛顿第二定律和加速度的定义可知，速度变化量的方向跟合外力的方向相同，因此，利用匀变速曲线运动速度变化量的方向可确定合外力的方向．还可在速度矢量三角形内画出运动过程中任一时刻的速度矢量，其末端都位于速度变化量所在的直线上，由点到直线的距离可知最小速度矢量必然垂直于速度变化量，即垂直于合外力．

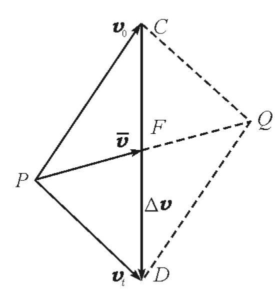

图 2　速度矢量三角形与平行四边形

平均速度公式写成矢量式为 $\bar{\boldsymbol{v}}=\dfrac{\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}_t}{2}$．这表明，匀变速运动的平均速度等于初速度与末速度矢量和的一半．平均速度可用矢量图表示，如图 2 所示，线段 PQ 表示初、末速度矢量和的大小，那么在速度矢量三角形 PCD 中，有向线段 PF 表示平均速度．根据平行四边形的两条对角线相互平分可知，平均速度矢量的末端位于速度变化量矢量的中点，这表明，平均速度矢量与速度矢量三角形的一条中线重合．有趣的是，对于匀变速曲线运动的末速度与初速度，其矢量差与矢量和是同一平行四边形的两条对角线．

平均速度的定义式写成矢量式为 $\bar{\boldsymbol{v}}=\dfrac{\boldsymbol{s}}{t}$. 由此可知平均速度的方向跟位移的方向相同. 所以,初速度与末速度矢量和的方向、平均速度的方向以及位移的方向都沿速度矢量平行四边形的对角线 PQ 方向.

1.2　关于矢量的特殊结论

先以平抛运动为例归纳两个结论,然后推广至一般的匀变速曲线运动.

对于平抛运动,以抛出点为坐标原点建立直角坐标系如图 3 所示,直角 $\triangle OAB$ 是位移矢量三角形. 可以证明,末速度矢量的反向延长线交于水平位移 OA 的中点. 考虑到速度变化量的方向跟重力的方向相同,可画出速度矢量三角形 BCD,可知位移矢量 $\overrightarrow{OB}$ 所在的直线交于速度变化量 $\Delta\boldsymbol{v}$ 的中点.

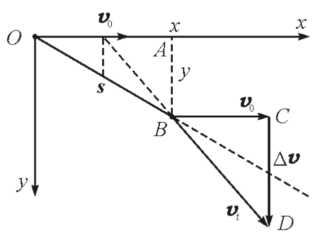

图 3　平抛运动位移矢量三角形与速度矢量三角形

由于初速度与末速度矢量和的方向跟位移的方向相同,因此速度矢量和在垂直于位移的方向没有分量,那么初速度与末速度矢量在垂直于位移方向的分量大小相等,方向相反. 具体而言,位移所在的直线经过 $\triangle BCD$ 底边 CD 的中点,若过初速度矢量与末速度矢量的末端分别作位移矢量所在直线的两条垂线表示速度分量的大小,则二者相等.

利用图 3,可知平抛运动有如下特殊结论:

(1) 在某位置的速度矢量的反向延长线与初速度矢量所在直线的交点是匀速运动位移的中点;

(2) 初速度矢量与末速度矢量在垂直于位移方向的分量大小相等,方向相反.

类比于平抛运动的两个结论,可推知一般化的匀变速曲线运动的两个结论[2].

结论 1:对于匀变速曲线运动,若认为质点在初速度方向做匀速直线运动,则末速度矢量的反向延长线与初速度矢量所在直线的交点为匀速直线运动位移的中点.

结论 2:对于匀变速曲线运动,质点经过任意两点的速度矢量在垂直于位移方向的分量大小相等,方向相反.

对于结论 1 的证明,可有多种方法,下面介绍一种比较简单的方法[3].

如图 4 所示,质点做斜上抛运动的轨迹为过点 A 与 B 的一段抛物线,位移大小为 $s=\overline{AB}$. 抛体运动位移矢量公式为 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{v}_0t+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2$,即斜上抛运动的位移等于初速度方向匀速直线运动位移与竖直方向自由落体运动位移的矢量和,若以 A 点为抛出点,则可画出位移矢量三角形 ACB;根据运动的可逆性,若以 B 点为抛出点,则可画出位移矢量三角形 BDA. 由于两个过程的运动时间相等,则自由落体位移相等,即 $\overline{CB}=\overline{DA}=h$,因此四边形 $ABCD$ 为平行四边形,则两条对角线相互平分. 所以,对于匀变速曲线运动,若根据位移矢量公式画出位移矢量三角形,则末速度矢量的反向延长线交于匀速运动位移矢量的中点.

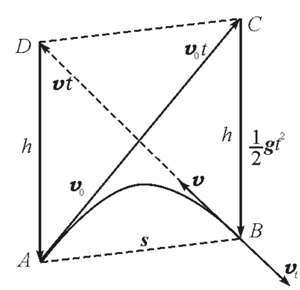

图 4　斜上抛运动位移矢量三角形

2　应用匀变速曲线运动的矢量规律

下面利用上述矢量规律巧妙解答几道物理题.

【例 1】在平行于纸面的匀强电场中,有一电荷量为 q 的粒子带正电,仅在电场力的作用下从电场中的点 A 运动到 B,粒子的初速度方向与 AB 连线的夹角为 30°,若速度大小由 $\sqrt{2}v_0$ 变为 v_0,如图 5 所示,求:(1) 末速度方向与位移方向的夹角 θ 的大小;(2) 场强方向与初速度所在直线的夹角 φ 的正切值;(3) 运动过程中的速度最小值.

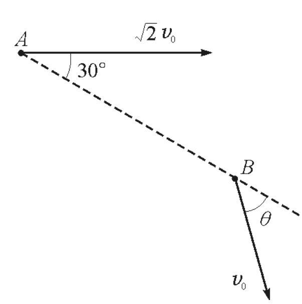

图 5　例 1 题图

解析:(1) 根据初、末速度在垂直于位移方向的分速度大小相等,可知$\sqrt{2}v_0\sin 30°=v_0\sin\theta$.

由此得 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,则夹角 $\theta=45°$.

(2) 画出速度矢量三角形如图 6 所示,则电场力方向沿着速度变化量的方向,即沿 CD 方向. 设场强方向与初速度所在直线的夹角为φ,由正弦定理可知

$$\frac{v_0}{\sin\varphi}=\frac{\sqrt{2}v_0}{\sin(180°-75°-\varphi)}$$

即
$$\frac{\cos(15°-\varphi)}{\sin\varphi}=\sqrt{2}$$

利用三角公式化简,可得

$$\tan\varphi=\frac{\cos 15°}{\sqrt{2}-\sin 15°}$$

利用半角公式化简得

$$\tan\varphi=\frac{1+2\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{6+\sqrt{3}}$$

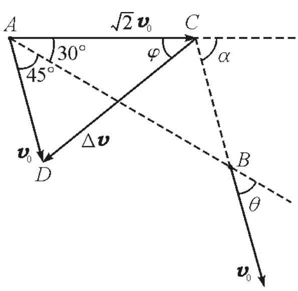

图 6　速度矢量三角形

(3) 当瞬时速度与合力方向垂直时,即速度矢量与速度变化量CD垂直时,速度最小,如图 7 所示. 利用两种方法计算 $\triangle ACD$ 的面积列方程为

$$S=\frac{1}{2}v_{\min}\Delta v=\frac{1}{2}\sqrt{2}v_0^2\sin 75°=\frac{\sqrt{2}}{2}v_0^2\cos 15°$$

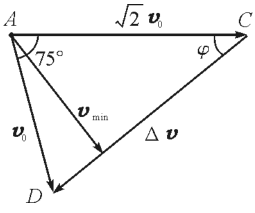

图 7　速度矢量三角形

由余弦定理可知速度变化量的大小为

$$\Delta v=\sqrt{3v_0^2-2\sqrt{2}v_0^2\cos 75°}=v_0\sqrt{3-2\sqrt{2}\sin 15°}$$

联立方程可得最小速度为

$$v_{\min}=\frac{\sqrt{2}v_0\cos 15°}{\sqrt{3-2\sqrt{2}\sin 15°}}=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}\,v_0}{2\sqrt{3-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}}$$

点评:对于第(1) 问,直接利用结论求速度与位移的夹角. 对于第(2) 问,关键是画出速度矢量三角形,根据速度变化量的方向确定电场力的方向,难点是利用正弦定理和三角公式求解一个内角. 对于第(3) 问,与斜上抛运动进行类比,即当速度方向与合力方向垂直时,速度最小,由此画出最小速度矢量,利用三角形的面积进行求解.

【例 2】如图 8 所示,从水平面上的O点以初速度v_0 抛出一个小球,恰好落在平台顶部的边缘,若抛射角为θ,小球的初速度与末速度相互垂直,求位移的大小及方向[4].

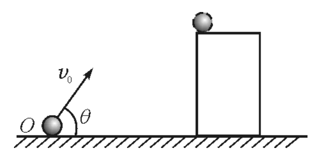

图 8　例 2 题图

解析:设小球的位置为 B,作出位移矢量三角形 OAB 如图 9 所示,可知线段 AB 的长度等于自由落体运动位移的大小,即$\overline{AB}=h=\dfrac{1}{2}gt^2$.

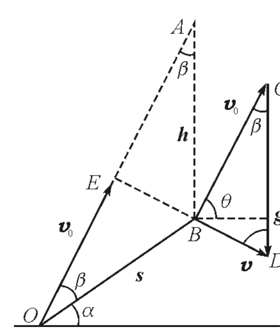

图 9　位移矢量三角形与速度矢量三角形

根据初速度与末速度相互垂直,作出速度矢量三角形 BCD. 已知抛射角为θ,由速度矢量直角三角形可知 $\angle D=\theta$,则有

$$\frac{v_0}{gt}=\sin\theta$$

作出末速度矢量的反向延长线 BE,可知 $BE\perp OA$,由于末速度矢量的反向延长线相交于位移 OA 的中点,可知 BE 是 OA 的垂直平分线,因此位移矢量三角形为等腰三角形,则有$\overline{OB}=\overline{AB}$.

联立方程得位移大小为

$$s=\overline{OB}=\frac{1}{2g}\left(\frac{v_0}{\sin\theta}\right)^2$$

从两个方面表示等腰三角形的底角为

$$\beta=\theta-\alpha=90^\circ-\theta$$

由此可得位移跟水平方向的夹角为 $\alpha=2\theta-90^\circ$.

点评:解题关键是把匀变速曲线运动分解为匀速直线运动和自由落体运动,并且分别画出位移矢量三角形与速度矢量三角形,并判断位移矢量三角形为等腰三角形.

【例 3】在地面上的 O 点以速度 v_0 抛射小球,抛射角为 θ,小球在运动过程中始终远离 O 点,求:当位移矢量与水平方向的夹角为 α 时,小球的速度为多大?

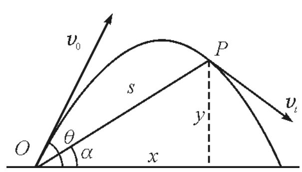

图 10　小球某时刻的位置和位移

解析:在地面上的某点抛射小球,在运动过程中始终远离抛射点,那么一定是斜上抛运动.在小球到达最高点之前,到抛出点的距离一直在增加,或者说,在小球上升过程中的位移是增加的,那么只需小球在下降过程中的位移一直增加,因此小球某时刻的位置 P 点应画在对称轴右边的抛物线上,则末速度方向斜向下,如图 10 所示.

画出位移矢量三角形 OAP 如图 11 所示,线段 OP 表示合位移,大小为 s.画出速度矢量三角形 PCD.线段 OP 的延长线与 CD 相交于点 F,可知点 F 是 CD 的中点,因此

$$\overline{CF}=\frac{1}{2}gt$$

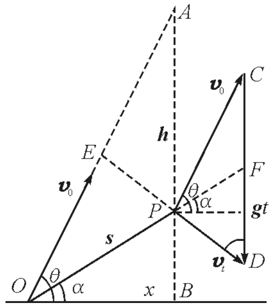

图 11　斜上抛运动位移矢量三角形与速度矢量三角形

在速度矢量三角形内作水平线,由此标出已知角 θ 和 α,利用两个角对应的直角三角形可知

$$\overline{CF}=v_0\sin\theta-v_0\cos\theta\tan\alpha$$

联立方程可得

$$t=\frac{2v_0\cos\theta}{g}(\tan\theta-\tan\alpha)$$

对水平线下方的直角三角形利用勾股定理得

$$v_t^2=(v_0\cos\theta)^2+(gt-v_0\sin\theta)^2=$$
$$v_0^2+(gt)^2-2gtv_0\sin^2\theta$$

把时间关系式代入,可得末速度大小为

$$v_t=v_0\sqrt{1-4\cos^2\theta\tan\alpha(\tan\theta-\tan\alpha)}$$

点评:解题关键是以点 P 为起点画出速度矢量三角形,并且作 OP 的延长线与 CD 交于点 F.还需按已知的两个角度在速度矢量三角形内作两条辅助线,由此形成 3 个直角三角形.

从图 3 和图 9 可见,若把位移矢量三角形与速度矢量三角形画在同一图中,需有一个共同顶点,由此可形成相互联系和对比,使得末速度反向延长线与位移延长线分别交于对边的中点.

3　结束语

综上可见,匀变速直线运动公式的矢量式同样适用于一般化的匀变速曲线运动.运动学矢量公式具有普遍性,其特殊情形是把公式中字母的矢量形式去掉,则简化为匀变速直线运动公式,但仍然具有矢量性,只不过在应用公式时,需选择正方向,在代入数值时考虑正负号.对于匀变速曲线运动问题,除了利用正交分解法来解答,还可利用斜交分解法来解答.关键是根据运动学公式反映的矢量关系画出矢量三角形,作一些辅助线形成若干直角三角形,并且利用与矢量有关的规律和结论.总之,把匀变速直线运动公式推广到匀变速曲线运动,将有助于揭示物理规律,优化知识结构,增强物理观念,拓展解题思路和方法,提高分析和解决物理问题的能力.

参考文献

[1] 周久波.用直线运动的公式直接解平抛运动算错吗[J].物理通报,2019,38(1):112-114.

[2] 张黎,何崇荣.场强方向判断容易出现的一个隐蔽性错误[J].物理通报,2021,40(6):64-65.

[3] 叶钫舟.抛体运动的位移平行四边形及其应用[J].物理通报,2020,39(9):125-128.

[4] 沈卫.投影不怕坐标“斜” 分解就要“速”不变[J].物理教学,2020,42(8):50-52.