

$x-t$ 图像在解高中物理超声波测速问题中的应用及拓展

张永涛

(库尔勒市实验中学 新疆 巴音郭楞 841000)

(收稿日期:2022-07-08)

摘要: 超声波测速问题由于同时涉及超声波的运动和汽车的运动,以及在不同时刻两物体的空间及时间的关系,用常规方法分析求解难度很大,而用 $x-t$ 图像可以轻松地 将超声波和汽车的空间与时间的定量关系展示出来,使超声波测速问题清晰快速地得到解决.并以此为基础验证了用 $x-t$ 图像求解汽车远离测速仪时汽车速度问题同样清晰快速.通过进一步分析得出了汽车做匀速直线运动与超声波测速仪工作参数的关系式,并在此基础上分析得出了汽车做匀变速直线运动时车速和加速度与超声波测速仪工作参数的关系式.在上述分析过程中 GeoGebra 数学绘图软件绘制出了细致准确的 $x-t$ 图像,同时方便地得到了整个问题所需的精密而完整数据,极大地促进了复杂问题的分析解决.

关键词: 超声波测速问题;常规解法; $x-t$ 图像法;GeoGebra

1 例题分析

在高一年级第一学期第一章“运动的描述”教学过程中遇到了一个与超声波测速原理有关的题目,题目由于同时涉及超声波的运动和汽车的运动,以及在不同时刻两物体的空间及时间的关系,学生分析和理解的难度较大.题目如下:

【例题】 用运动传感器可以测量运动物体的速度:如图 1 所示,这个系统有一个不动的小盒子 B.工作时,小盒 B 向被测物体发出短暂的超声波脉冲,脉冲被运动物体反射后又被盒 B 接收. B 将信息输入计算机由计算机处理该信息,可得到被测物体的速度.若盒 B 每间隔 1.5 s 发出一个超声波脉冲,而每隔 1.3 s 接收到一个超声波脉冲(声速取 340 m/s).



图 1 例题题目

(1) 试判断汽车是远离小盒 B, 还是靠近小盒 B?

(2) 试求汽车的速度是多少?

在查找了各方面提供的解析过程之后,发现关于这道题的所有解法都是常规解法,并且都缺少超声波和汽车在不同时刻的空间及时间的示意图,造成理解这道题的解析非常困难.所以笔者首先补全了这道题关键的超声波和汽车在不同时刻的空间及

时间的示意图,并在此基础上给出了这道题的详细解题过程,使学生更加容易地理解这道题的解题每一步.但常规解法分析内容很多,尤其是正确地画出超声波和汽车空间及时间的示意图难度较大,耗时很长.

之后又思考了这道题可以用 $x-t$ 图像分析,发现 $x-t$ 图像能轻松地将超声波和汽车的空间与时间的定量关系展示出来,由 $x-t$ 图像也非常容易找到二者空间与时间的数学关系式,省去了常规解法规模很大且耗时的分析两物体在不同时刻的空间及时间的示意图过程,是一个非常值得推荐的好方法.在用 $x-t$ 图像完成这道题的分析之后,通过进一步分析找出了汽车做匀速直线运动时,汽车速度与超声波测速仪工作参数的关系式.并在此基础上进一步分析出了超声波测速仪是怎样测出汽车做匀变速直线运动时的速度和加速度的,以及汽车做匀变速直线运动时的速度和加速度的表达式.

同时在使用 $x-t$ 图像分析这道题及拓展内容的过程中使用到了 GeoGebra 这款功能强大的数学绘图软件,在设定参数后直接就得到了与题目情境符合的 $x-t$ 图像及对应时刻的数据,从另一个角度上印证了出题者所使用的数据是真实可信的,也为各位教师今后编制题目快速找到与题目匹配的数据提供了一条非常方便准确的途径.并且 GeoGebra 软件绘制出的 $x-t$ 图像反映出的信息更加全面,也很容

易拓展到小车远离探测器的情况,分析出小车以题设的速度行驶时,探测器每隔多长时间接收到超声波.现将笔者对这道题的思考介绍如下.

2 例题解析

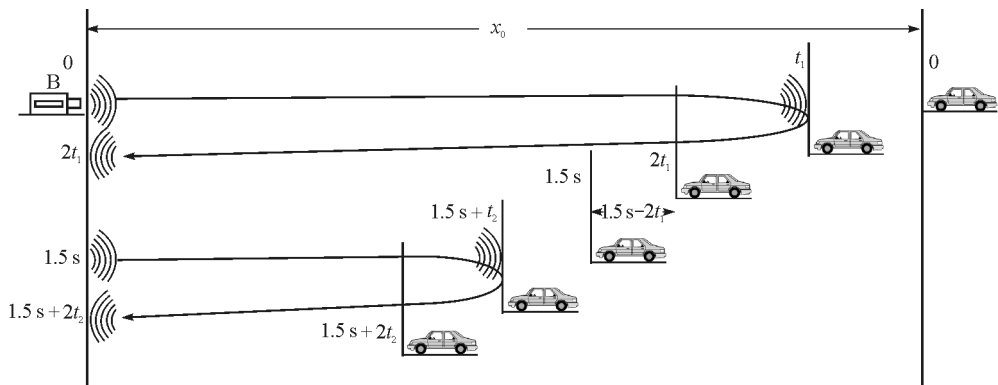


图2 汽车向测速仪匀速运动时汽车与超声波相互位置示意图

(1) 根据题意得:盒B每隔1.5s发出一个超声波脉冲,而每隔1.3s接收到一个超声波脉冲,在 $1.5\text{ s} > 1.3\text{ s}$,时间变短,由 $s=vt$ 知, s 变小,故汽车运动的方向是靠近小盒B.

(2) 设测速仪第一次发出超声波时,测速仪与汽车之间的距离为 x_0 ,以超声波发出的时刻为零时刻,经过了 t_1 时间超声波与汽车相遇,而信号从汽车处返回测速仪,也经过了 t_1 的时间.则有

$$x_0 = 340t_1 + v_{\text{车}} t_1 \quad (1)$$

测速仪第二次发出超声波时,经过了 t_2 时间超声波与汽车相遇,而信号从汽车处返回测速仪,也经过了 t_2 的时间.则有

$$x_0 = 340t_2 + v_{\text{车}} t_2 + v_{\text{车}} (2t_1 + 1.5 - 2t_1) \quad (2)$$

2.1 常规解法

画出运动示意图(图2),画图时注意关键位置的时间应标注的是以第一次发出超声波为计时起点对应的时刻.

根据式(1)、(2)可得

$$340t_1 + v_{\text{车}} t_1 = 340t_2 + v_{\text{车}} t_2 + v_{\text{车}} \times 1.5$$

$$340(t_1 - t_2) + v_{\text{车}} (t_1 - t_2) = v_{\text{车}} \times 1.5 \quad (3)$$

同时测速仪每隔1.3s接收到一个超声波脉冲,所以

$$1.5 + 2t_2 - 2t_1 = 1.3\text{ s}$$

$$t_1 - t_2 = 0.1\text{ s} \quad (4)$$

由式(3)与式(4)可得汽车的速度为

$$v_{\text{车}} = 24.3\text{ m/s}$$

2.2 用 $x-t$ 图像求解

(1) 用GeoGebra软件画出超声波和汽车的 $x-t$ 图像(图3)(汽车靠近超声波测速仪时).

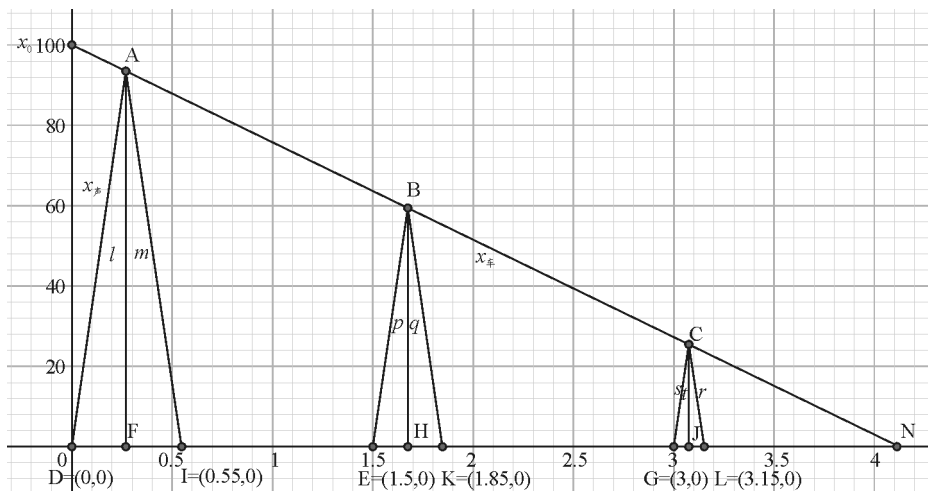


图3 汽车向测速仪匀速运动时汽车与超声波的 $x-t$ 图像

(2) 根据 $x-t$ 图像(图 4) 解题.

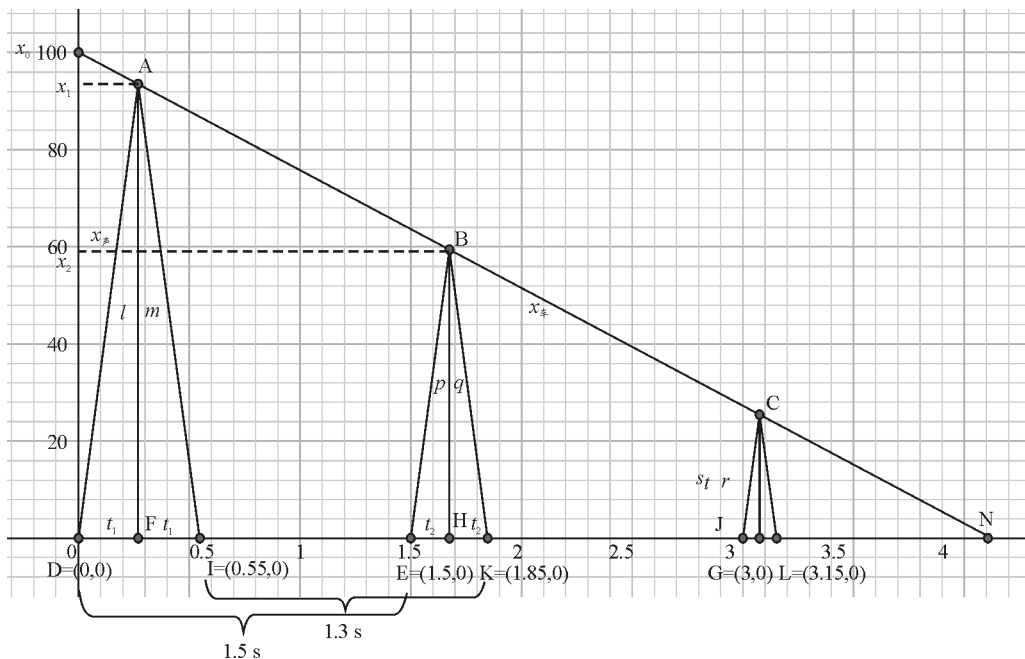


图 4 汽车向测速仪匀速运动时汽车与超声波的 $x-t$ 图像及解题分析图

设测速仪第一次发出超声波时,测速仪与汽车之间的距离为 x_0 ,以超声波发出的时刻为零时刻,经过了 t_1 时间超声波与汽车相遇,而信号从汽车处返回测速仪,也经过了 t_1 的时间,则有

$$x_0 = 340t_1 + v_{\text{车}} t_1 \quad (5)$$

测速仪第二次发出超声波时,经过了 t_2 时间超声波与汽车相遇,而信号从汽车处返回测速仪,也经过了 t_2 的时间,则有

$$x_0 = 340t_2 + v_{\text{车}}(1.5 + t_2) \quad (6)$$

根据式(5)、(6)可得

$$340t_1 + v_{\text{车}} t_1 = 340t_2 + v_{\text{车}}(1.5 + t_2)$$

$$340(t_1 - t_2) + v_{\text{车}}(t_1 - t_2) = v_{\text{车}} \times 1.5 \quad (7)$$

同时测速仪每隔 1.3 s 接收到一个超声波脉冲,所以由 $x-t$ 图像可知

$$1.5 - 2t_1 = 1.3 - 2t_2 \quad (8)$$

$$t_1 - t_2 = 0.1 \text{ s} \quad (9)$$

由式(7)、(9)可得汽车的速度为

$$v_{\text{车}} = 24.3 \text{ m/s}$$

3 拓展应用

3.1 拓展应用 1

将该题目改编为汽车做远离超声波测速仪运动

时汽车速度求解问题及这种情况下探测器每隔多长时间接收一次超声波脉冲的数据的获得方法.

在 GeoGebra 软件绘图功能的支持下,这道题还可以改编为汽车远离超声波发射器运动时汽车速度求解问题,其中探测器每隔多长时间接收一次超声波脉冲的数据可以直接在 GeoGebra 软件绘制的 $x-t$ 图像(图 5) 中读出来,为 1.73 s. 这样这道改编题就为如下内容.

【改编题】用运动传感器可以测量运动物体的速度:如图 1 所示,这个系统有一个不动的小盒子 B. 工作时,小盒 B 向被测物体发出短暂的超声波脉冲,脉冲被运动物体反射后又被盒 B 接收. B 将信息输入计算机由计算机处理该信息,可得到被测物体的速度.若盒 B 每间隔 1.5 s 发出一个超声波脉冲,而每隔 1.73 s 接收到一个超声波脉冲(声速取 340 m/s).

(1) 试判断汽车是远离小盒 B, 还是靠近小盒 B?

(2) 试求汽车的速度是多少?

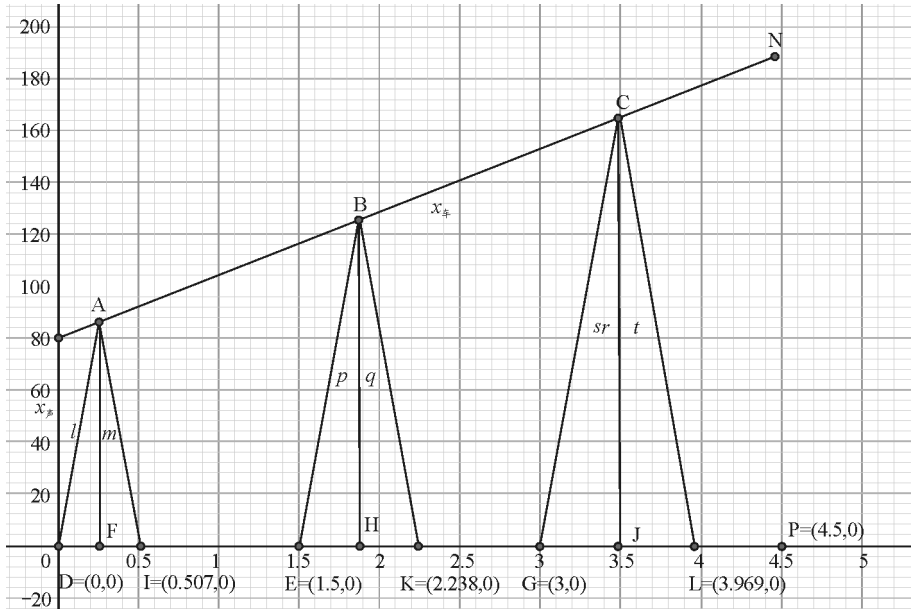


图5 汽车远离测速仪匀速运动时汽车与超声波的 $x-t$ 图像

解题过程如下：

设测速仪第一次发出超声波时，测速仪与汽车之间的距离为 x_0 ，以超声波发出的时刻为零时刻，

经过了 t_1 时间超声波与汽车相遇，此时汽车距超声波发射器的距离为 x_1 ，而信号从汽车处返回测速仪，也经过了 t_1 的时间。则由 $x-t$ 图像(图6)可得

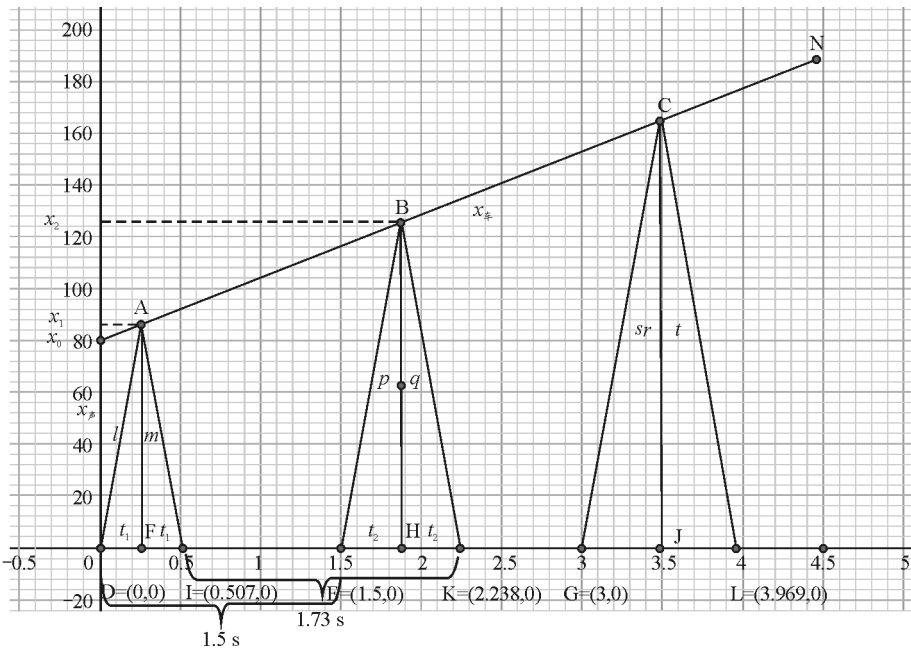


图6 汽车远离测速仪匀速运动时汽车与超声波的 $x-t$ 图像及解题分析图

$$x_1 = x_0 + v_{\text{车}} = v_{\text{声}}$$

$$x_1 = x_0 + v_{\text{车}} t_1 = 340 t_1$$

$$x_0 = (340 - v_{\text{车}}) t_1 \quad (10)$$

测速仪第二次发出超声波时，经过了 t_2 时间超声波与汽车相遇，此时汽车距超声波测速仪的距离

为 x_2 ，而信号从汽车处返回测速仪，也经过了 t_2 的时间。则由 $x-t$ 图像可得

$$x_2 = x_0 + v_{\text{车}} = v_{\text{声}}$$

$$x_2 = x_0 + v_{\text{车}} (1.5 + t_2) = 340 t_2$$

$$x_0 = (340 - v_{\text{车}}) t_2 - v_{\text{车}} \times 1.5 \quad (11)$$

根据式(10)、(11)可得

$$(340 - v_{\text{车}}) t_1 = (340 - v_{\text{车}}) t_2 - v_{\text{车}} \times 1.5$$

$$(340 - v_{\text{车}})(t_2 - t_1) = v_{\text{车}} \times 1.5 \quad (12)$$

同时测速仪每隔 1.73 s 接收到一个超声波脉冲,所以由 $x-t$ 图像可知

$$1.5 - 2 t_1 = 1.73 - 2 t_2 \quad (13)$$

$$t_2 - t_1 = 0.115 \text{ s} \quad (14)$$

由式(12)、(14)可得汽车的速度为

$$v_{\text{车}} = 24.2 \text{ m/s}$$

3.2 拓展应用 2

超声波测速问题中汽车做匀速直线运动时汽车速度与超声波测速仪工作参数的关系式.

(1) 汽车向超声波测速仪匀速运动时

由式(7)可得

$$v_{\text{车}} = \frac{340(t_1 - t_2)}{1.5 - (t_1 - t_2)} \quad (15)$$

设超声波发射器每隔 1.5 s 发射一次超声波脉冲的时间为 $\Delta t_{\text{发}}$, 设超声波接收器每隔 1.3 s 接收一次超声波脉冲的时间为 $\Delta t_{\text{接}}$. 由式(8)可得

$$(t_1 - t_2) = \frac{\Delta t_{\text{发}} - \Delta t_{\text{接}}}{2} \quad (16)$$

由式(15)、(16)可得汽车向超声波测速仪匀速运动时的速度表达式为

$$v_{\text{车}} = \frac{340(\Delta t_{\text{发}} - \Delta t_{\text{接}})}{\Delta t_{\text{发}} + \Delta t_{\text{接}}} \quad (17)$$

(2) 汽车远离超声波测速仪匀速运动时

由式(12)可得

$$v_{\text{车}} = \frac{340(t_2 - t_1)}{1.5 + (t_2 - t_1)} \quad (18)$$

设超声波测速仪每隔 1.5 s 发射一次超声波脉冲的时间为 $\Delta t_{\text{发}}$, 设超声波测速仪每隔 1.73 s 接收一次超声波脉冲的时间为 $\Delta t_{\text{接}}$. 由式(13)可得

$$(t_2 - t_1) = \frac{\Delta t_{\text{接}} - \Delta t_{\text{发}}}{2} \quad (19)$$

由式(18)、(19)可得汽车向超声波测速仪匀速运动时的速度表达式为

$$v_{\text{车}} = \frac{340(\Delta t_{\text{接}} - \Delta t_{\text{发}})}{\Delta t_{\text{发}} + \Delta t_{\text{接}}} \quad (20)$$

(3) 超声波测速问题中汽车在 15 °C 的空气中做匀速直线运动时汽车速度与超声波测速仪工作参

数的关系式.

由式(17)、(20)可得超声波测速问题中汽车做匀速直线运动时汽车速度大小与超声波测速仪工作参数的通用关系式

$$v_{\text{车}} = \frac{340 |\Delta t_{\text{发}} - \Delta t_{\text{接}}|}{\Delta t_{\text{发}} + \Delta t_{\text{接}}}$$

式中 340 m/s 为声音在 15 °C 的空气中的传播速度, $\Delta t_{\text{发}}$ 为超声波测速仪每发射一次超声波脉冲的时间间隔, $\Delta t_{\text{接}}$ 为超声波测速仪每接收一次超声波脉冲的时间间隔.

(4) 超声波测速问题中汽车在其他温度的空气中做匀速直线运动时汽车速度与超声波测速仪工作参数的关系式

$$v_{\text{车}} = \frac{v_{\text{声}} |\Delta t_{\text{发}} - \Delta t_{\text{接}}|}{\Delta t_{\text{发}} + \Delta t_{\text{接}}}$$

其中 $v_{\text{声}}$ 为声音在某温度的空气中的传播速度, $\Delta t_{\text{发}}$ 为超声波测速仪每发射一次超声波脉冲的时间间隔, $\Delta t_{\text{接}}$ 为超声波测速仪每接收一次超声波脉冲的时间间隔.

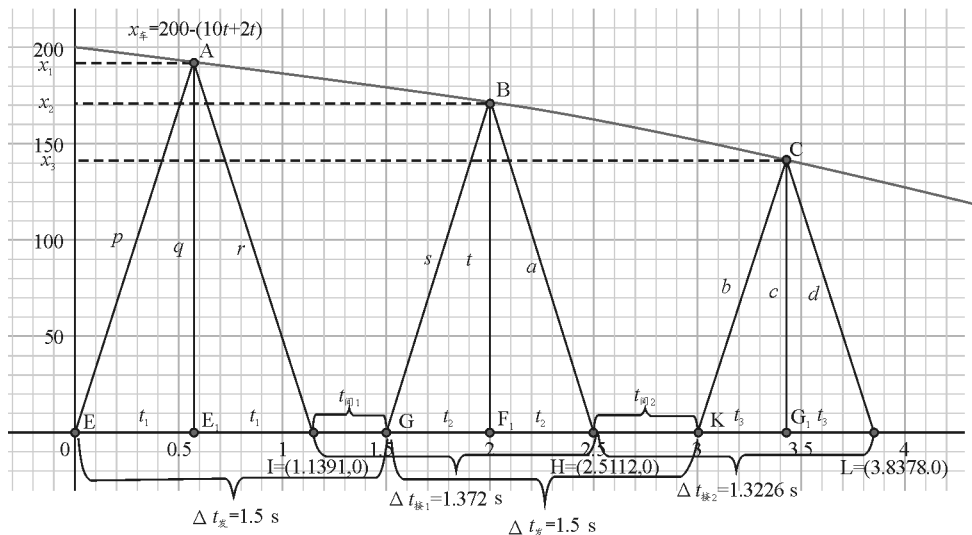
3.3 拓展应用 3

超声波测速问题中汽车做匀变速直线运动时汽车速度与超声波测速仪工作参数的关系式.

(1) 汽车向超声波测速仪做匀加速直线运动.

设汽车做匀加速直线运动, 加速度为 $a = 4 \text{ m/s}^2$. 汽车在距离超声波测速仪 x_0 的位置时, 超声波测速仪发出第一个脉冲, 此时汽车速度为 $v_0 = 10 \text{ m/s}$. 以后超声波测速仪始终以 1.5 s 的时间间隔依次发射脉冲. 设超声波测速仪每隔 1.5 s 发射一次超声波脉冲的时间间隔为 $\Delta t_{\text{发}}$. 超声波测速仪每接收一次超声波脉冲的时间间隔为 $\Delta t_{\text{接}}$.

设测速仪第一次发出超声波时, 测速仪与汽车之间的距离为 x_0 , 以超声波发出的时刻为零时刻, 经过了 t_1 时间超声波与汽车相遇, 此时汽车距超声波测速仪的距离为 x_1 , 而信号从汽车处返回测速仪, 也经过了 t_1 的时间. 1.5 s 后超声波测速仪发出第二个脉冲, 经过了 t_2 时间超声波与汽车相遇, 此时汽车距超声波测速仪的距离为 x_2 , 而信号从汽车处返回测速仪, 也经过了 t_2 的时间. 则由 GeoGebra 软件绘制的 $x-t$ 图像(图 7)可得

图7 汽车向测速仪匀加速运动时汽车与超声波的 $x-t$ 图像及解题分析图

$$x_1 = 340 t_1 \quad (21)$$

$$x_2 = 340 t_2 \quad (22)$$

$$\Delta x_1 = x_1 - x_2 = 340(t_1 - t_2) \quad (23)$$

同时测速仪接收到第一个和第二个超声波脉冲的时间间隔为 $\Delta t_{\text{接}1} = 1.372 \text{ s}$, 所以由 $x-t$ 图像可知

$$\Delta t_{\text{发}} - 2 t_1 = \Delta t_{\text{接}1} - 2 t_2$$

$$t_1 - t_2 = \frac{\Delta t_{\text{发}} - \Delta t_{\text{接}1}}{2} \quad (24)$$

将式(24)代入式(23)中, 可得

$$\Delta x_1 = 340 \frac{(\Delta t_{\text{发}} - \Delta t_{\text{接}1})}{2} \quad (25)$$

汽车第一次与超声波相遇到汽车第二次与超声波相遇的时间间隔为 Δt_1 , 满足

$$\Delta t_1 = t_1 + t_{\text{间}1} + t_2 \quad (26)$$

对 $t_{\text{间}1}$

$$t_{\text{间}1} = \Delta t_{\text{发}} - 2 t_1 \quad t_{\text{间}1} = \Delta t_{\text{接}1} - 2 t_2$$

将这两个式子相加

$$2 t_{\text{间}1} = \Delta t_{\text{发}} + \Delta t_{\text{接}1} - 2 t_1 - 2 t_2$$

$$t_{\text{间}1} = \frac{\Delta t_{\text{发}} + \Delta t_{\text{接}1}}{2} - (t_1 + t_2) \quad (27)$$

将式(27)代入式(26)中, 可得

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta t_{\text{发}} + \Delta t_{\text{接}1}}{2} \quad (28)$$

将式(25)、(28)联立, 可得汽车第一次与超声波相遇到汽车第二次与超声波相遇的时间间隔内, 汽车的平均速度(中间时刻的瞬时速度)为

$$v_{\text{中间}1} = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{340(\Delta t_{\text{发}} - \Delta t_{\text{接}1})}{\Delta t_{\text{发}} + \Delta t_{\text{接}1}} \quad (29)$$

同理, 超声波测速仪发出第二个脉冲, 经过了 t_2

时间超声波与汽车相遇, 此时汽车距超声波测速仪的距离为 x_2 , 而信号从汽车处返回测速仪, 也经过了 t_2 的时间. 1.5 后超声波测速仪发出第三个脉冲, 经过了 t_3 时间超声波与汽车相遇, 此时汽车距超声波测速仪的距离为 x_3 , 而信号从汽车处返回测速仪, 也经过了 t_3 的时间, 则由 $x-t$ 图像(图7)可得

$$x_2 = 340 t_2 \quad (30)$$

$$x_3 = 340 t_3 \quad (31)$$

$$\Delta x_2 = x_2 - x_3 = 340(t_2 - t_3) \quad (32)$$

同时测速仪接收到第一个和第二个超声波脉冲的时间间隔为 $\Delta t_{\text{接}2} = 1.3226 \text{ s}$, 所以由 $x-t$ 图像可知

$$\Delta t_{\text{发}} - 2 t_2 = \Delta t_{\text{接}2} - 2 t_3$$

$$t_2 - t_3 = \frac{\Delta t_{\text{发}} - \Delta t_{\text{接}2}}{2} \quad (33)$$

将式(33)代入式(22)中, 可得

$$\Delta x_2 = 340 \frac{(\Delta t_{\text{发}} - \Delta t_{\text{接}2})}{2} \quad (34)$$

汽车第二次与超声波相遇到汽车第三次与超声波相遇的时间间隔为 Δt_2 , 满足

$$\Delta t_2 = t_2 + t_{\text{间}2} + t_3 \quad (35)$$

对 $t_{\text{间}2}$

$$t_{\text{间}2} = \Delta t_{\text{发}} - 2 t_2$$

$$t_{\text{间}2} = \Delta t_{\text{接}2} - 2 t_3$$

将这两个式子相加

$$2 t_{\text{间}2} = \Delta t_{\text{发}} + \Delta t_{\text{接}2} - 2 t_2 - 2 t_3$$

$$t_{\text{间}2} = \frac{\Delta t_{\text{发}} + \Delta t_{\text{接}2}}{2} - (t_2 + t_3) \quad (36)$$

将式(36)代入式(35)中,可得

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta t_{发} + \Delta t_{接2}}{2} \quad (37)$$

将式(34)、(37) 联立,可得汽车第二次与超声波相遇与汽车第三次与超声波相遇的时间间隔内,汽车的平均速度(中间时刻的瞬时速度)为

$$v_{中间2} = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = \frac{340(\Delta t_{发} - \Delta t_{接2})}{\Delta t_{发} + \Delta t_{接2}} \quad (38)$$

对汽车由速度 $v_{中间1}$ 增加到 $v_{中间2}$ 过程,用时为 Δt_{21} ,满足

$$\Delta t_{21} = \frac{\Delta t_1 + \Delta t_2}{2} = \frac{2\Delta t_{发} + \Delta t_{接1} + \Delta t_{接2}}{4} \quad (39)$$

所以可以得到匀加速直线运动的汽车的加速度 a 大小为

$$a = \frac{v_{中间2} - v_{中间1}}{\Delta t_{21}} \quad (40)$$

所以可以得到匀加速直线运动的汽车在第一次与超声波相遇时的速度为

$$v_{相遇1} = v_{中间1} - a \frac{\Delta t_1}{2} \quad (41)$$

由于式(40)、(41) 两式的最终表达式体量较大,在此不再写出。

(2) 结论

超声波测速仪探测匀变速直线运动汽车速度、加速度与其工作参数的通用表达式

$$v_{中间1} = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{340|\Delta t_{发} - \Delta t_{接1}|}{\Delta t_{发} + \Delta t_{接1}} \quad (42)$$

$$v_{中间2} = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = \frac{340|\Delta t_{发} - \Delta t_{接2}|}{\Delta t_{发} + \Delta t_{接2}} \quad (43)$$

$$\Delta t_{21} = \frac{\Delta t_1 + \Delta t_2}{2} = \frac{2\Delta t_{发} + \Delta t_{接1} + \Delta t_{接2}}{4} \quad (44)$$

$$a = \frac{v_{中间2} - v_{中间1}}{\Delta t_{21}} \quad (45)$$

$$v_{相遇1} = v_{中间1} - a \frac{\Delta t_1}{2} \quad (46)$$

其中式(45)得到的加速度为正数时表示汽车做匀加速直线运动,为负数时表示汽车做匀减速直线运动。

(3) 验证:将超声波探测汽车做向超声波测速仪匀加速直线运动时所得数据代入式(42)~(45)中得 $a = 3.9949 \text{ m/s}^2$,与题设情况符合.证明式(42)~(45)4式正确。

(4) 式(42)~(46)这5式对汽车以加速度 $a=4 \text{ m/s}^2$ 做远离超声波测速仪的匀加速直线运动的速度和加速度也是适用的.如 GeoGebra 软件绘制的 $x-t$ 图像(图8)所示。

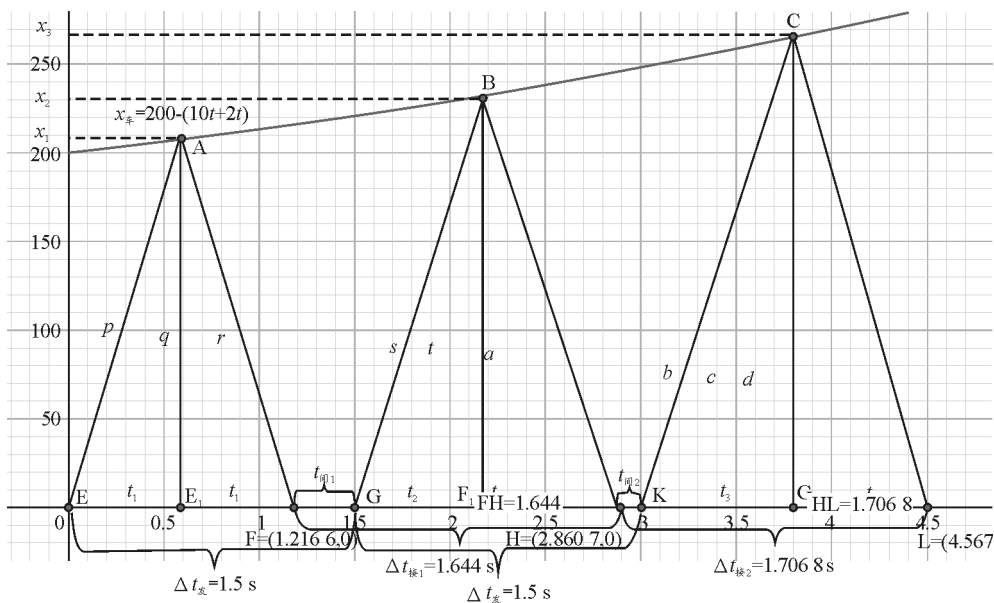


图8 汽车远离测速仪匀加速运动时汽车与超声波的 $x-t$ 图像及解题分析图

将超声波测速仪探测汽车做远离超声波测速仪匀加速直线运动时的数据代入式(42)~(45)中得 $a = 4.0016 \text{ m/s}^2$,与题设情况符合.证明式(42)~(45)这4式正确。

(5) 验证:(42)~(45)这4式对汽车以加速度大小为 $a=4 \text{ m/s}^2$ 做向超声波测速仪的匀减速直线运动的速度和加速度也是适用的.如 GeoGebra 软件绘制的 $x-t$ 图像(图9)所示。

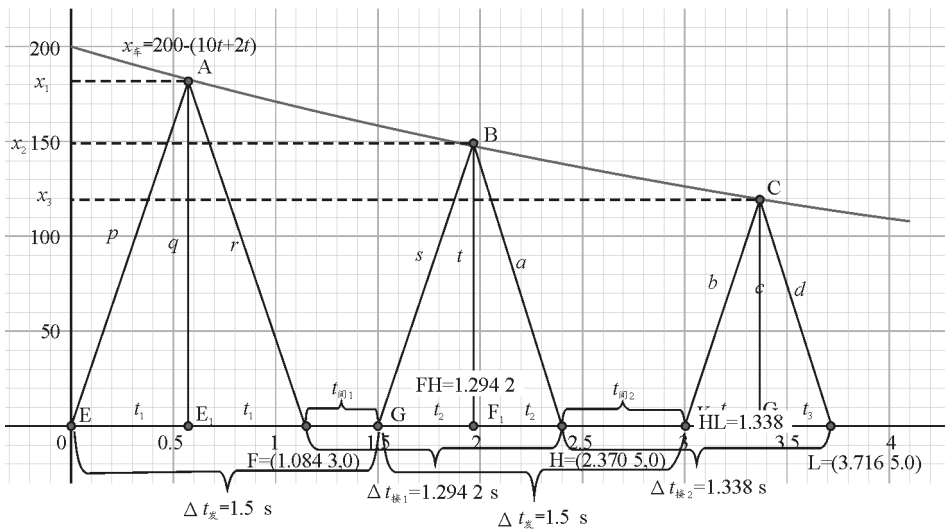


图9 汽车向测速仪匀减速运动时汽车与超声波的 $x-t$ 图像及解题分析图

将超声波测速仪探测汽车做向超声波测速仪匀减速直线运动时所得数据代入式(42)~(45)中得 $a = -4.0012 \text{ m/s}^2$, 与题设情况符合. 证明式(42)~(45)这4式正确.

(6) 验证: 式(42)~(45)这4式对汽车以加速度大小为 $a = 4 \text{ m/s}^2$ 做远离超声波测速仪的匀减速直线运动的速度和加速度也是适用的. 如GeoGebra软件绘制的 $x-t$ 图像(图10)所示.

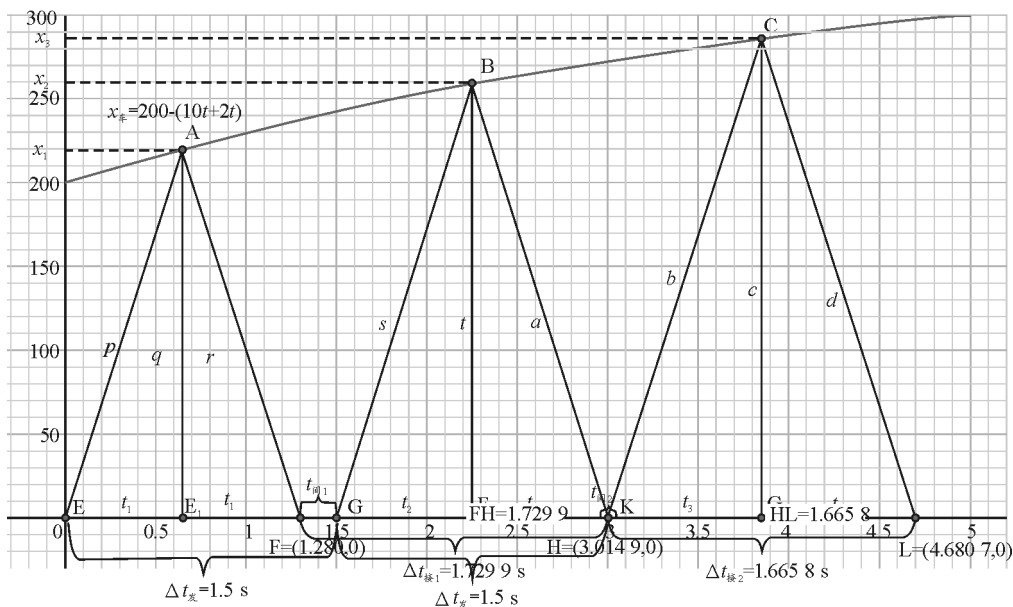


图10 汽车远离测速仪匀减速运动时汽车与超声波的 $x-t$ 图像及解题分析图

将超声波测速仪探测汽车做远离超声波测速仪匀减速直线运动时的数据代入式(42)~(45)中得 $a = -3.9991 \text{ m/s}^2$, 与题设情况符合. 证明式(42)~(45)这4式正确.

这辆汽车经过超声波测速仪时的速度和加速度, 让我们不禁感慨物理学家的聪明才智以及物理学知识对社会发展进步起到的巨大促进作用.

参考文献

(7) 同时我们从式(42)~(45)得出的推导过程也能理解交通警察所使用的超声波测速仪的测速原理, 以及要获得汽车经过超声波测速仪时的速度必须依靠能进行复杂计算的计算设备才能快速得出

[1] 杨榕楠. 更高更妙的物理——高考高分与自主招生决胜篇[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 2013: 39-40.
 [2] 王贵军. GeoGebra与数学实验[M]. 北京: 清华大学出版社, 2017: 35-77.