

用指数函数折射率模型分析海市蜃楼现象

姚小银

(南京师范大学附属苏州石湖中学 江苏 苏州 215299)

王忠纯

(盐城师范学院物理系 江苏 盐城 224002)

(收稿日期:2022-08-01)

摘要:利用指数函数折射率大气模型,定量分析了海市蜃楼现象.首先由光线的微分方程解出了光线方程,绘出了指数函数折射率模型大气中光线的轨迹,然后分析了可能观察到蜃像的范围,最后研究了蜃像的位置和观察者的关系.

关键词:海市蜃楼;指数函数折射率;光线方程;蜃像位置

1 引言

海市蜃楼是一种自然现象,多发生于大海和沙漠中,实验室中也可模拟出海市蜃楼现象.由于海水的热容量很大,在强烈的阳光照射下,水温也不易升高,使得海面上方的空气层出现下冷上暖现象.从而空气密度由下向上逐渐减小,空气折射率也是由下向上逐渐减小.在无风的情况下,这种状态可保持相对稳定,此状态下有可能产生上现蜃景.与上述情况相反,在强光照射的干燥沙漠中,地面温度容易升高,空气的导热系数又较差,会形成下方温度高而上方温度低的空气层,从而地面附近大气折射率由下向上逐渐增大,有可能形成下现蜃景.

对于海市蜃楼现象一般只给出定性解释,也有少数文献给出了定量分析.文献[10]用线变折射率模型分析了海市蜃楼,文献[11]用近轴光线近似来研究海市蜃楼成像.但线变折射率模型太过于简单,与大气实际折射率的情况有一定的偏差,而指数函数折射率模型与实际情况较为接近.本文在文献[10]的基础上,利用指数函数折射率模型来研究一般情况(非近轴近似)下的海市蜃楼现象,在给出指数函数折射率模型的基础上,由光线微分方程解出了光线方程,绘出了指数函数折射率模型大气中光线的轨迹,然后进一步研究了蜃像的位置和观察者

的关系.

2 光线方程

在几何光学中,光的能量可看成沿光线传播,其传输路径遵循光线微分方程.此方程的解,即光线的路径主要取决于介质折射率分布^[10].设研究范围内地面可以近似地看成平面(xz 面),大气折射率沿竖直方向变化 $n=n(y)$.将地面附近大气看成由无限多薄平面层组成,同一层内折射率近似相等.以上现蜃景为例,随着 y 的增大,各层的折射率依次减小(图1).设点光源处在地面上坐标原点,由折射定律不难导出^[10]

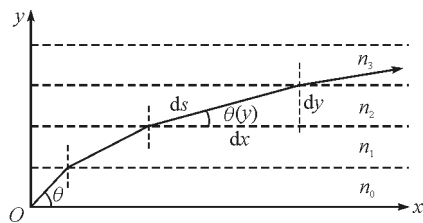


图1 光线在大气中的折射率

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2n_0^2 \cos^2 \theta} \frac{dn^2}{dy} \quad (1)$$

此即为一般变折射率大气中光线的微分方程.

在湿冷的海水上空,空气的折射率随高度的增加而减小,可用指数模型来描述

$$n^2(y) = n_0^2 e^{-\alpha y} \quad (2)$$

其中 n_0 为海平面处大气折射率, α 在一定的温度梯度下为常数, 对于上现蜃景, $\alpha > 0$. 将式(2)求导得

$$\frac{dn^2}{dy} = -\alpha n_0^2 e^{-\alpha y}$$

将其代入光线的微分方程(1)中得

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\alpha}{2 \cos^2 \theta} e^{-\alpha y}$$

令

$$\frac{dy}{dx} = p$$

则

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = p \frac{dp}{dy}$$

于是有

$$\begin{aligned} p \frac{dy}{dx} &= -\frac{\alpha}{2 \cos^2 \theta} e^{-\alpha y} \\ \int p dp &= -\frac{\alpha}{2 \cos^2 \theta} \int e^{-\alpha y} dy \\ \frac{1}{2} p^2 &= \frac{\alpha}{2 \cos^2 \theta} e^{-\alpha y} + \frac{C_1}{2} \\ \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= \frac{1}{\cos^2 \theta} e^{-\alpha y} + C_1 \end{aligned} \quad (3)$$

其中 C_1 为积分常数. 设物点位于海平面上坐标原点处(图1), 则初始条件为

$$\begin{aligned} \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} &= \tan \theta \\ y|_{x=0} &= 0 \\ \tan^2 \theta &= \frac{1}{\cos^2 \theta} + C_1 \end{aligned}$$

由此可以定出积分常数, $C_1 = -1$. 将积分常数代入式(3), 得

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta} e^{-\alpha y} - 1} = \pm \frac{e^{-\frac{\alpha}{2} y}}{\cos \theta} \sqrt{1 - \cos^2 \theta e^{\alpha y}}$$

令

$$t = \cos \theta e^{\frac{\alpha}{2} y}$$

$$dt = \frac{\alpha}{2} \cos \theta e^{\frac{\alpha}{2} y} dy$$

则上式可以化简为

$$dx = \pm \frac{2}{\alpha} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

对上式两边积分, 得

$$x = \pm \frac{2}{\alpha} \arcsin t + C_2$$

$$\arcsin(\cos \theta e^{\frac{\alpha}{2} y}) = \pm \frac{\alpha}{2} (x - C_2)$$

或

$$y = \frac{2}{\alpha} \ln \left\{ \pm \frac{1}{\cos \theta} \sin \left[\frac{\alpha}{2} (x - C_2) \right] \right\}$$

由于初始时刻 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} > 0$, 所以上式应取正值.

又由初始条件 $y|_{x=0} > 0$, 可得

$$C_2 = -\frac{2}{\alpha} \arcsin(\cos \theta) = -\frac{2}{\alpha} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

$$y = \frac{2}{\alpha} \ln \left[\frac{1}{\cos \theta} \sin \left(\frac{\alpha}{2} x + \frac{\pi}{2} - \theta \right) \right] \quad (4)$$

式(4)为光线方程(这里所谓光线实际上指光能量传播的方向). 图2给出了 $\alpha = \frac{1}{3}$, $\theta = 0.10\pi, 0.15\pi, 0.20\pi, \dots, 0.40\pi, 0.45\pi, 0.49\pi$ 不同值时, 位于原点处的物点发出的光线. 这里只给出了 xy 面上 x 轴正方向上的光线, 实际光线应是以 Oy 为旋转轴画出的一系列曲面. 由图2可见, 光线传播的过程中不会相交, 故不会成实像. 光线经折射后向下弯曲, 有可能形成上现蜃景, 但海平面上观察者看到的光束是否为单芯光束? 我们再作以下分析.

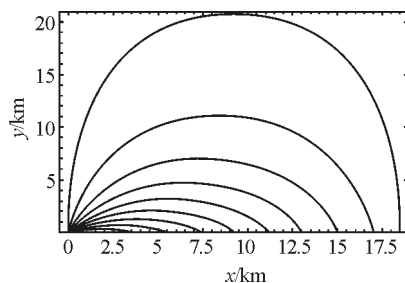


图2 指数函数折射率模型中的光线

3 蜃像的位置

3.1 可观察到蜃像的范围

我们先来求在海平面上可以观察到蜃像的范围, 令

$$y = \frac{2}{\alpha} \ln \left[\frac{1}{\cos \theta} \sin \left(\frac{\alpha}{2} x + \frac{\pi}{2} - \theta \right) \right] = 0$$

则

$$\sin \left(\frac{\alpha}{2} x + \frac{\pi}{2} - \theta \right) = \cos \theta$$

即

$$\frac{\alpha}{2} x + \frac{\pi}{2} - \theta = \arcsin(\cos \theta)$$

或

$$\frac{\alpha}{2}x + \frac{\pi}{2} - \theta = \pi - \arcsin(\cos \theta)$$

光线与 x 轴的一个交点为: $x=0$, 此即物体所在处;

另一个交点为

$$x_0(\theta) = \frac{4}{\alpha}\theta \quad (5)$$

即位于原点的物点发出的不同倾角 θ 的光线与 x 轴的交点 x_0 与 θ 成线性关系(图3中 $\alpha = \frac{1}{3}$), 这与线变折射率的情况完全不同^[10], 线变折射率情况下 x_0 与 θ 的关系是非线性的, 且存在极大值点. 由于 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 所以 $x_{0\max} = \frac{2\pi}{\alpha}$. 观察者只有在 $x_{0\max}$ 以内才有可能观察到蜃景. α 愈大, $x_{0\max}$ 愈小, 可能观察到蜃景的范围愈小.

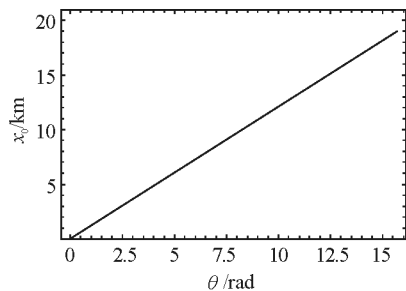


图3 光线和海平面的交点与角 θ 的关系

3.2 光线与海平面交点处的斜率

将式(4)对 x 求偏导

$$k(x, \theta) = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}x + \frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}x + \frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}x + \frac{\pi}{2} - \theta\right) \quad (6)$$

令

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

得

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}x + \frac{\pi}{2} - \theta\right) = 0$$

$$\frac{\alpha}{2}x + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{2}{\alpha}\theta$$

此即光线极值点的横坐标. 从而,

$$\text{当 } x \in \left\{0, \frac{2}{\alpha}\theta\right\} \text{ 时, } \frac{dy}{dx} > 0;$$

$$\text{当 } x \in \left\{\frac{2}{\alpha}\theta, \frac{4}{\alpha}\theta\right\} \text{ 时, } \frac{dy}{dx} < 0.$$

而我们现在所要研究的范围是 $\frac{dy}{dx} < 0$ 区域, 只

有在 $\frac{2}{\alpha}\theta < x < \frac{4}{\alpha}\theta$ 范围内才有可能观察到上现蜃景.

将 $x = x_0(\theta)$ 代入式(6), 得光线在与 x 轴交点处的斜率

$$k(x_0, \theta) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}x_0 + \frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \tan \theta \quad (7)$$

3.3 求观察者看到的像点的位置

设观察者在 $x_0(\theta)$ (图4中A点)处, 眼睛瞳孔的线度为 $AB = \Delta y(x_0, \theta)$ (AB 为瞳孔的范围), 在眼睛瞳孔范围内, 可观察到的光线对应的物光倾角为 $\theta \sim \theta + \Delta\theta$, 则光线在B点处相应的坐标为 $[x_0, y(x_0, \theta + \Delta\theta)]$, 光线在B点处对应的斜率为 $k(x_0, \theta + \Delta\theta)$.

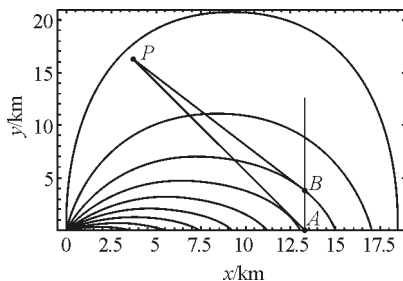


图4 观察者看到的像点的位置

瞳孔看到的两边缘光线的切线方程为

$$Y_1 = k(x_0, \theta) [X - x_0(\theta)] \quad (8)$$

$$Y_2 - y(x_0, \theta + \Delta\theta) = k(x_0, \theta + \Delta\theta) [X - x_0(\theta)]$$

坐标 (X, Y_1) 为切线 AP 上的点, 坐标 (X, Y_2) 为切线 BP 上的点.

设这两条切线交于 $P[x_1(\theta), y_1(\theta)]$ 处, 则

$$k(x_0, \theta) [X - x_0(\theta)] =$$

$$k(x_0, \theta + \Delta\theta) [X - x_0(\theta)] + y(x_0, \theta + \Delta\theta)$$

解出

$$X = x_0(\theta) + \frac{y(x_0, \theta + \Delta\theta)}{k(x_0, \theta) - k(x_0, \theta + \Delta\theta)} \quad (9)$$

因为

$$y(x_0, \theta) = 0$$

则

$$\Delta y(x_0, \theta) = y(x_0, \theta + \Delta\theta) = \left. \frac{\partial y}{\partial \theta} \right|_{x_0, \theta} \Delta\theta$$

$$k(x_0, \theta + \Delta\theta) - k(x_0, \theta) = \left. \frac{\partial k}{\partial \theta} \right|_{x_0, \theta} \Delta\theta$$

把以上两式代入式(9), 并化简得

$$X = x_1(\theta) = x_0(\theta) - \left. \frac{\partial y}{\partial \theta} \right|_{x_0, \theta} / \left. \frac{\partial k}{\partial \theta} \right|_{x_0, \theta} \quad (10)$$

由式(6)对 θ 求导得

$$\left. \frac{\partial k}{\partial \theta} \right|_{x_0, \theta} = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}x + \frac{\pi}{2} - \theta\right)} \Big|_{x_0, \theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} \quad (11)$$

由式(4)对 θ 求导得

$$\frac{\partial y(x, \theta)}{\partial \theta} = \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}x + \frac{\pi}{2} - \theta\right)} \cdot \frac{-\cos\left(\frac{\alpha}{2}x + \frac{\pi}{2} - \theta\right) \cos \theta + \sin\left(\frac{\alpha}{2}x + \frac{\pi}{2} - \theta\right) \sin \theta}{\cos^2 \theta}$$

将式(5)

$$x = x_0(\theta) = \frac{4}{\alpha}\theta$$

代入上式得

$$\frac{\partial y(x_0, \theta)}{\partial \theta} = \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} \cdot \frac{-\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \cos \theta + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \sin \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{4}{\alpha} \tan \theta \quad (12)$$

将式(11)、(12)代入式(10)并化简得

$$x_1(\theta) = x_0(\theta) - \frac{4}{\alpha} \sin \theta \cos \theta$$

再将式(5)代入上式, 整理得像点的横坐标为

$$x_1(\theta) = \frac{4}{\alpha}\theta - \frac{4}{\alpha} \sin \theta \cos \theta = \frac{4}{\alpha} [\theta - \sin \theta \cos \theta] \quad (13)$$

将式(13)代入式(8)即得像点的纵坐标

$$y_1(\theta) = -\tan \theta \left[-\frac{4}{\alpha} \sin \theta \cos \theta \right] = \frac{4}{\alpha} \sin^2 \theta \quad (14)$$

P 点的横坐标与 θ 有关, 说明折射光束的单芯性被破坏, 不能理想成像. 但由于眼睛瞳孔的范围很小, 对应的 θ 变化很小, 从而在一固定点观察时, x_1 可以近似的认为不变, 仍可以观察到蜃像. 图5为 $\alpha = \frac{1}{3}$ 时 x_1 关于 θ 的曲线. 图6为 $\alpha = \frac{1}{3}$ 时 y_1 关于 θ 的曲线.

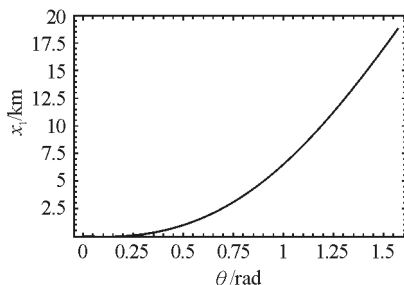


图5 像点的横坐标与 θ 角的关系

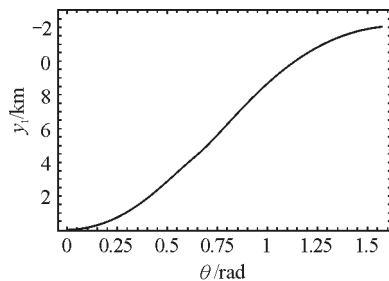


图6 像点的纵坐标与 θ 角的关系

位于 $x_0(\theta)$ 处的观察者看到由原点发出的光的像点坐标为 $[x_1(\theta), y_1(\theta)]$. 为便于比较, 图7给出了 x_0, x_1, y_1 与 θ 的关系.

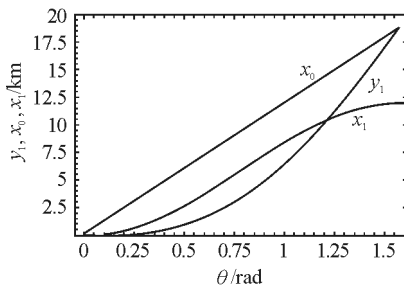


图7 像点位置与观察者的关系

对于同一物点, 像的位置与 θ 有关, 折射光束不能理想成像. 但在瞳孔范围内可近似成像. 位于不同 $x_0(\theta)$ 的观察者看到的像的位置不同. 在可能观察到蜃景的范围内, 观察者距原物体愈近(x_0 愈小, θ 愈小, y_1 也愈小), 则观察到上现蜃景的位置愈低.

(下转第161页)

【例题】如图5所示,两个等量的正点电荷, O 点为两点电荷连线的中点, A 点为两点电荷连线的中垂线上的一点.一带负电的试探电荷 q ,从 A 点由静止释放,只在静电力作用下运动,则()

- A. q 由 A 点向 O 点的运动速度一直增加
 B. q 由 A 点向 O 点的运动速度先增加后减小
 C. q 由 A 点向 O 点的运动加速度一直减小
 D. q 由 A 点向 O 点的运动加速度先增加后减小

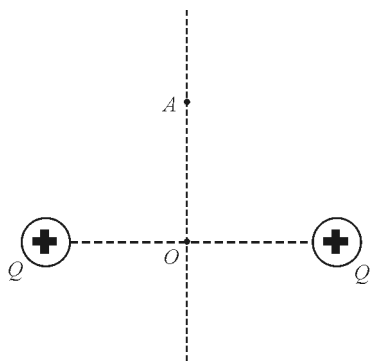


图5 例题题图

解析:因为不清楚 A 点与中垂线上电场强度最大处的关系,所以对于运动加速度的变化情况需进

行分类讨论:如 A 点在 O 点与电场强度最大处之间,则 q 由 A 点向 O 点的运动加速度一直减小;如电场强度的最大处在 A 点与 O 点之间,则 q 由 A 点向 O 点的运动加速度先增加后减小.对于运动速度, q 由 A 点向 O 点的运动受到的静电力从 A 点指向 O 点,一直做加速运动.正确答案为选项A.

两种定量数学分析方法是高中生数学知识学习要求掌握的内容,对学有余力的学生不仅定性还要定量知道,在两等量同种点电荷连线的中垂线上存在着场强最大值点.通过多种方法分析、解决物理问题过程,不仅仅是为了得到答案或结论,而是要全面锻炼学生的科学思维能力,全面提高学生的问题解决能力,形成物理观念.解决问题有依据,有思路,实现知识向能力的转变,最终形成素养.

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中物理课程标准(2017年版2020年修订)[S]. 北京:人民教育出版社,2020.
 [2] 冯建跃. 用初等数学方法求等量同种电荷中垂线上电场强度的极值[J]. 物理教师,2015(11):56-57.
 [3] 陈一垠. 关于两等量同种点电荷中垂线上场强最大值的再思考[J]. 物理通报,2015(6):121-122.

(上接第158页)

又由于总有 $0 < x_2(\theta) < x_0(\theta)$,所以蜃像与原物体总是处在观察者的同侧,且像与观察者的水平距离比原物与观察者的水平距离小.

以上用指数函数折射率模型分析了海市蜃楼上现蜃景现象.对于下现蜃景的情形,可以取 $n^2(y) = n_0^2(1 - e^{-\alpha y})$,并将物点置于地面上方一定高度,即可相应地进行分析.此时蜃像位于下方,且与观察者的水平距离比原物近.

4 结论

本文利用指数函数折射率模型研究了一般情况下的海市蜃楼现象.结果表明,在指数函数折射率模型下,折射光束不能理想成像.但由于人眼瞳孔的范围很小,仍可观察到像点.对于同一物点,蜃像的位置与观察点有关.蜃像与原物体总是处在观察者的同侧,并处在观察者的上方(上现蜃景).在可能观察到蜃景的范围内,观察者距原物体愈近,则观察到上现蜃景的位置愈低.所得结论与实际观测结果一致.

参考文献

- [1] 玻恩,沃耳夫. 光学原理(上、下册)[M]. 北京:电子工业出版社,2005.
 [2] 赫克特 E, 赞斯 A. 光学[M]. 北京:高等教育出版社,1983.
 [3] 叶培大,吴彝尊. 光波导技术基本理论[M]. 北京:人民邮电出版社,1984.
 [4] A·K·伽塔克, K·谢伽拉扬. 近代光学[M]. 北京:高等教育出版社,1988.
 [5] 姚启钧. 光学教程[M]. 3版. 北京:高等教育出版社,1996.
 [6] 赵凯华, 钟锡华. 光学[M]. 北京:北京大学出版社,1991.
 [7] 易明. 光学[M]. 北京:高等教育出版社,2000.
 [8] 章志鸣. 光学[M]. 北京:高等教育出版社,1999.
 [9] 郭永康. 光学[M]. 成都:四川大学出版社,1998.
 [10] 王忠纯. 用线性变折射率模型解释海市蜃楼[J]. 大学物理,2001(9):24-27.
 [11] 吕洪君. “海市蜃楼”的理论研究[J]. 安徽教育学院学报,1998(1):26-28.