

一类电功率最值问题的解析及规律溯源

汪小龙

(新疆克拉玛依市第十六中学 新疆 克拉玛依 834014)

王天文

(克拉玛依市教研所 新疆 克拉玛依 834014)

杜建华

(新疆克拉玛依市第十六中学 新疆 克拉玛依 834014)

(收稿日期:2022-09-05)

摘要:电功率计算,特别是动态电路中滑动变阻器电功率的最大值问题,因物理约束条件多,数量关系复杂,且计算公式可选择性非常灵活等特点,致使学生在问题理解、推理计算过程中存在较大的困难.在解析一类电功率最大值问题的基础上,通过题型溯源的方式科学分析不同解法的共性和个性,并透过解法深度理解物理规律的本质.

关键词:电功率;最值问题;共性;个性

1 引言

近年来,新疆中考在延续“五考”合一的基础上,全面贯彻落实教育部“关于做好2022年中考命题工作”的文件指示精神,同时密切回应社会对“双减”减量不减质的刚性需求,在《中共中央国务院关于深化教育教学改革全面提高义务教育质量的意见》等相关文件精神指引下,不断通过优化试题结构、创新试题情境、密切航空航天科技等方式,实现物理试题质量的稳步提升和内涵发展.现以电功率最值问题为例,通过多种不同方法的求解,在逻辑分析途径的基础上,通过题型溯源的方式科学分析不同解法的共性和个性,并透过解法深度理解物理规律的本质.

2 电功率试题及解析

2.1 电功率试题

【例题1】(2020年新疆中考物理试卷第12题)

如图1所示的电路中,电源电压保持不变,滑动变阻器 R_1 、 R_2 的滑片可移动的最大距离相等.开始时, R_1 、 R_2 的滑片均位于变阻器的正中间,开关闭合后,电路的总功率为0.4 W.若将 R_1 的滑片向左移动3 cm, R_2 的滑片向右移动3 cm,电路的总功率

变为0.3 W;若将 R_1 、 R_2 的滑片从正中间均向右移动3 cm,电路的总功率变为0.5 W.已知滑动变阻器电阻丝的阻值与其长度成正比,则滑动变阻器 R_1 的最大阻值与 R_2 的最大阻值之比为()

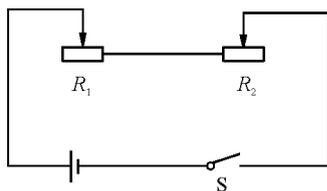


图1 例题1图

- A. 3 : 1 B. 4 : 1 C. 5 : 1 D. 6 : 1

2.2 解析

解法1(电压守恒法):设 R_1 、 R_2 的最大阻值分别为 R_1 、 R_2 ,两个变阻器滑片可移动的距离为 a cm,则滑片移动3 cm时,其连入电路电阻的变化量为最大阻值的 $\frac{3}{a}$ 倍.

由公式 $P = \frac{U^2}{R}$ 可得 R_1 、 R_2 的滑片均位于变阻器的正中间时

$$P_1 = \frac{U^2}{0.5R_1 + 0.5R_2} = 0.4 \text{ W} \quad (1)$$

将 R_1 的滑片由中间向左移动3 cm, R_2 的滑片由中间向右移动3 cm时

$$P_2 = \frac{U^2}{0.5R_1 + \frac{3}{a}R_1 + 0.5R_2 + \frac{3}{a}R_2} = 0.3 \text{ W} \quad (2)$$

将 R_1 、 R_2 的滑片从正中间均向右移动 3 cm 时

$$P_3 = \frac{U^2}{0.5R_1 - \frac{3}{a}R_1 + 0.5R_2 + \frac{3}{a}R_2} = 0.5 \text{ W} \quad (3)$$

式(1)除以式(2)可得

$$a = 18$$

将距离 $a \text{ cm} = 18 \text{ cm}$ 分别代入式(2)、(3)中,将两式相除,整理得

$$R_1 : R_2 = 4 : 1$$

解法 2: 题目中滑动变阻器每次移动的距离都是 3 cm, 可以设 R_1 移动 3 cm 时电阻的变化量为 r_{x1} , R_2 移动 3 cm 时电阻的变化量为 r_{x2} , 并设 R_1 、 R_2 的最大阻值分别为 R_1 、 R_2 .

由公式 $P = \frac{U^2}{R}$ 可得 R_1 、 R_2 的滑片均位于变阻器的正中间时

$$P_1 = \frac{U^2}{0.5R_1 + 0.5R_2} = 0.4 \text{ W} \quad (4)$$

将 R_1 的滑片由中间向左移动 3 cm, R_2 的滑片由中间向右移动 3 cm 时

$$P_2 = \frac{U^2}{0.5R_1 + r_{x1} + 0.5R_2 + r_{x2}} = 0.3 \text{ W} \quad (5)$$

将 R_1 、 R_2 的滑片从正中间均向右移动 3 cm 时

$$P_3 = \frac{U^2}{0.5R_1 - r_{x1} + 0.5R_2 + r_{x2}} = 0.5 \text{ W} \quad (6)$$

式(4)除以式(5)可得

$$r_{x1} + r_{x2} = \frac{5}{6}U^2$$

式(4)除以式(6)可得

$$r_{x1} - r_{x2} = \frac{1}{2}U^2$$

解得

$$r_{x1} = \frac{2}{3}U^2 \quad r_{x2} = \frac{1}{6}U^2$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{r_{x1}}{r_{x2}} = 4 : 1$$

解法 3: 题设同解法 2, 由 $P = \frac{U^2}{R}$, 可得

$$\Delta R = U^2 \left(\frac{1}{P'} - \frac{1}{P} \right)$$

滑片由中间位置变为 R_1 向左滑动 3 cm, R_2 向

右滑动 3 cm 时与 R_1 、 R_2 的滑片均位于变阻器的正中间时相比电阻的变化量为

$$\Delta R = (0.5R_1 + r_{x1} + 0.5R_2 + r_{x2}) - (0.5R_1 + 0.5R_2) = r_{x1} + r_{x2}$$

所以

$$r_{x1} + r_{x2} = U^2 \left(\frac{1}{0.3} - \frac{1}{0.4} \right) = \frac{5}{6}U^2 \quad (7)$$

同理, 滑片由中间位置均向右滑动 3 cm 时与 R_1 、 R_2 的滑片均位于变阻器的正中间时相比电阻的变化量为

$$\Delta R' = (0.5R_1 - r_{x1} + 0.5R_2 + r_{x2}) - (0.5R_1 + 0.5R_2) = r_{x2} - r_{x1}$$

滑片由中间位置变为 R_1 向左滑动 3 cm, R_2 向右滑动 3 cm 时, 电阻变化量为

$$\Delta R = (0.5R_1 - r_{x1} + 0.5R_2 + r_{x2}) - (0.5R_1 + 0.5R_2) = r_{x2} - r_{x1}$$

所以

$$r_{x2} - r_{x1} = U^2 \left(\frac{1}{0.5} - \frac{1}{0.4} \right) = -\frac{1}{2}U^2 \quad (8)$$

联立式(7)、(8)解得

$$r_{x1} = \frac{2}{3}U^2 \quad r_{x2} = \frac{1}{6}U^2$$

所以

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{r_{x1}}{r_{x2}} = 4 : 1$$

解法 4(赋值法): 观察题设中给出的数据特点, 设电源电压 $U = 1.2 \text{ V}$, 则有

$$0.5R_1 + 0.5R_2 = 3.6 \text{ V} \quad (9)$$

$$0.5R_1 + r_{x1} + 0.5R_2 + r_{x2} = 4.8 \text{ V} \quad (10)$$

$$0.5R_1 - r_{x1} + 0.5R_2 + r_{x2} = 2.88 \text{ V} \quad (11)$$

联立式(9)~(11), 得

$$r_{x1} = 0.96 \Omega \quad r_{x2} = 0.24 \Omega$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{r_{x1}}{r_{x2}} = 4 : 1$$

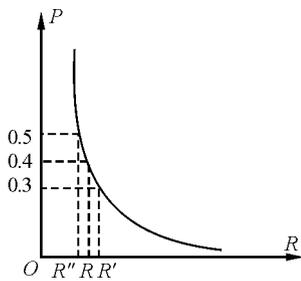
解法 5(图像法):

依次设滑片均在中间位置时电路总电阻为 R , 分别向左向右移动 3 cm 后电路总电阻为 R' , 均向右移动 3 cm 后电路总电阻为 R'' , 根据 $P-R$ 图像(图 2), 有

$$0.4R = 0.3R' = 0.5R''$$

所以

$$R' = \frac{4}{3}R \quad R'' = \frac{4}{5}R$$

图2 $P-R$ 图像

通过观察图 3(a)、(b)、(c) 中电阻的变化, 电阻 R' 变化为 R'' 时, 只有第一个滑动变阻器的阻值变化了 $2r_{x1}$, 即

$$2r_{x1} = R' - R'' = \frac{4}{3}R - \frac{4}{5}R = \frac{8}{15}R$$

解得

$$r_{x1} = \frac{4}{15}R$$

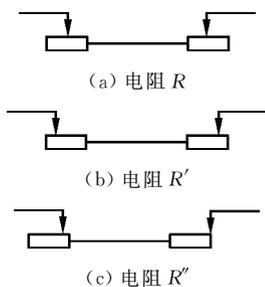


图3 电阻变化示意图

同理, 电阻 R 变为 R' 时, 阻值变化了 $r_{x1} + r_{x2}$, 即

$$r_{x1} + r_{x2} = R' - R = \frac{4}{3}R - R = \frac{1}{3}R$$

解得

$$r_{x2} = \frac{1}{15}R$$

所以

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{r_{x1}}{r_{x2}} = 4 : 1$$

为了深刻理解滑动变阻器阻值变化引起的用电器电功率或电路总功率变化问题的本质, 在例题 1 的基础上, 通过对滑动变阻器 R_1 和 R_2 的对称性调节, 分析和探讨电功率的最值问题。

变式 1-1: 如图 4 所示的电路中, 电源电压保持不变, 滑动变阻器 R_1 、 R_2 的最大阻值分别为 20Ω 、 5Ω 。调节 R_2 的滑片至最右端, 并移动 R_1 的滑片, 使得

R_1 的电功率为最大值 P_1 ; 再调节 R_1 的滑片至最左端, 并移动 R_2 的滑片, 使得 R_2 的电功率为最大值 P_2 ; 则 $P_1 : P_2$ 为 ()

- A. $4 : 1$ B. $1 : 4$
C. $25 : 4$ D. $4 : 25$

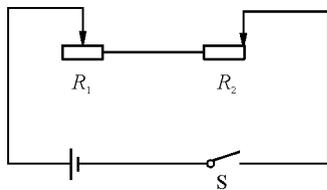


图4 变式 1-1 图

解析: 在串联电路中, 当滑动变阻器阻值等于定值电阻的阻值时, 滑动变阻器具有最大电功率. 设电源电压为 U , 则

$$P_1 = \frac{\left(\frac{R_1}{R_1 + R_2}U\right)^2}{R_1} = \frac{R_1 U^2}{(R_1 + R_2)^2}$$

又因

$$R_1 = R_2 = 5 \Omega$$

所以

$$P_1 = \frac{R_1 U^2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{R_2 U^2}{(R_2 + R_2)^2} = \frac{5U^2}{(5+5)^2} = \frac{U^2}{20}$$

同理

$$P_2 = \frac{\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}U\right)^2}{R_2} = \frac{R_{2\max} U^2}{(R_{1\max} + R_{2\max})^2} = \frac{5U^2}{(20+5)^2} = \frac{U^2}{125}$$

所以

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{U^2}{20}}{\frac{U^2}{125}} = \frac{25}{4}$$

选项 C 正确。

3 题型溯源

题目呈现的电路结构中有两个滑动变阻器, 且滑片都在一定的范围内移动, 阻值可变, 属于较为复杂的动态电路问题. 深究物理问题的本质, 每一个看似复杂的问题通常由若干个较为简单的问题复合而成. 根据这一思路, 对上述问题进行简化, 把其中的

一个滑动变阻器变为定值电阻,则会溯源出此类试题的庐山真面目.比如例题2就是这类题.

【例题2】在如图5(a)的电路中,电源电压保持不变, R_0 为定值电阻,滑动变阻器 R 的最大阻值为 R ,移动滑动变阻器的滑片 P 从 A 端到 B 端,滑动变阻器的电功率随电流表示数变化的完整图线如图5(b)所示,图线中 a 、 b 两点对应的电功率均为 P_1 ,且 c 点对应的是滑动变阻器的最大电功率 P_2 ,且有 $P_1:P_2=3:4$,则图线中 b 点对应的电路状态中,滑动变阻器接入电路中的电阻大小()

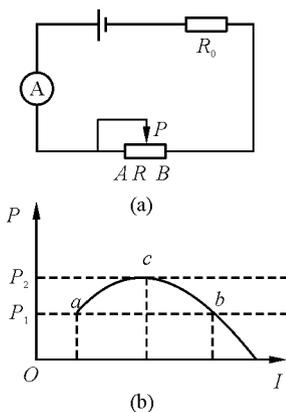


图5 例2题图

- A. $\frac{R_0}{2}$ B. $\frac{R_0}{3}$ C. $2R_0$ D. $3R_0$

解析:在串联电路中,当滑动变阻器阻值等于定值电阻的阻值时,滑动变阻器具有最大电功率,所以 c 点时滑动变阻器的阻值为 R_0 , a 点对应滑动变阻器阻值最大端时的功率.设电源电压为 U , c 点时,电路总功率为 $2P_2$,得

$$2P_2 = \frac{U^2}{2R_0} \quad (12)$$

a 点时

$$P_1 = I^2 R = \left(\frac{U}{R_0 + R} \right)^2 R \quad (13)$$

因 $P_1:P_2=3:4$,所以式(12)除以式(13)得

$$\frac{(R_0 + R)^2}{2R_0 R} = \frac{8}{3}$$

则

$$(3R - R_0)(R - 3R_0) = 0$$

解得 a 点时 $R = 3R_0$; b 点时 $R = \frac{1}{3}R_0$,所以选项B正确.

在串联电路中,为什么当滑动变阻器阻值等于

定值电阻的阻值时,滑动变阻器的电功率最大?这又涉及到串联电路中滑动变阻器功率的最值问题.如例题3.

【例题3】电路图同例题2,已知定值电阻 R_1 为 3Ω ,滑动变阻器 R_2 的最大阻值为 9Ω ,电源电压恒定为 6V .当滑片 P 移到连入电路的电阻为多大时,滑动变阻器消耗的电功率最大?此时电功率为多少?

解析:由串联电路的电流特点和分压规律可得

$$I_2 = \frac{U}{R_1 + R_2} \quad U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U$$

所以

$$P_2 = U_2 I_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{U^2 R_2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{U^2}{\left(\frac{R_1}{\sqrt{R_2}} \right)^2 + (\sqrt{R_2})^2 + 2R_1}$$

因为

$$\left(\frac{R_1}{\sqrt{R_2}} \right)^2 + (\sqrt{R_2})^2 \geq 2 \frac{R_1}{\sqrt{R_2}} \sqrt{R_2} = 2R_1$$

此时 $R_1 = R_2$.

所以,该串联电路中,只有滑动变阻器的阻值和定值电阻的阻值相等时,滑动变阻器的功率最大.即, $R_2 = R_1 = 3\Omega$,此时电路电流

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{6\text{V}}{3\Omega + 3\Omega} = 1\text{A}$$

所以将数据代入功率公式 $P_2 = I^2 R_2$ 得最大功率

$$P_{2\text{max}} = 3\text{W}$$

4 试题解法的共性和个性分析

纵观上述例题的各种解法,不难看出,滑动变阻器功率最大值问题不仅仅涉及到物理学科电功率公式的熟练使用,而且对学生的物理思维能力,特别是对数学极值公式或均值定理等极值方面的运算技巧要求很高.无论是传统的公式计算,还是数形结合、极限、赋值等特殊计算方法,其共同和共通的本质属性是物理规律.2022年4月21日最新颁布的《义务教育物理课程标准》,仍将电功率定位为“理解”的认知层次.这说明,电功率仍处于电学部分的核心地位.这一

核心地位要求学生“什么是电功率”“电功率如何计算”“不同的串并联电路中电功率的计算有什么特点”等核心知识要达到理解和综合应用的程度。

以上不同解法的共性基础就是电功率在特定电路或具体用电器中的计算表达式,即

$$P = UI \quad P = I^2 R \quad P = \frac{U^2}{R}$$

究竟选用哪一个公式展开计算,取决于特定的条件.通常来说,由于串联电路中流经各用电器的电流相等,故选用 $P = I^2 R$;并联电路各支路两端电压始终相等,选用 $P = \frac{U^2}{R}$.当然,在解析具体的物理问题时,也会因问题的变化而灵活选择不同的公式.如例题1,尽管是串联电路,但是考虑到电源电压守恒,因此选用了 $P = \frac{U^2}{R}$.足见,在理解物理问题时,应遵循具体问题具体分析的思路,而不能只从形式上一概而论.

4.1 正解 曲径处通幽

以上试题并不只是单一考查学生对电功率计算程序的理解,而重在考查学生面对多变量、多公式、非传统等有一定综合难度物理问题时所表现出的物理观念、科学思维、科学探究、科学态度与责任等核心素养^[1].

正解,即传统的公式求解,是学生在后续进一步学习物理时必须具备的基本品质.正解运算中规中矩,逻辑推理符合学生的认知特点,演绎过程就是核心物理规律的变化关系.但是,正解时所涉及的相关物理量数量较多,特别是在一些有一定难度的试题中,需要引入一个或几个与求解结果并不直接相关的中间变量,会对学生的求解过程带来意想不到的压力和干扰,很多正解过程不顺畅或终止的原因,就是因为中间变量过多,最终因学生产生质疑而放弃推理.

正解,恰似曲径通幽.能遵循物理规律,依照数学关系,合理关照未知量,利用方程整体消元,辅之相关专项训练,必然柳暗花明.

4.2 图解 直观而简约

例题1作为“五考”合一后物理中考试题变化中的典范,进一步说明物理中考试题更加关注对学生物理关键能力的考查.特别是对建模能力、创新能力

和方程综合运算能力的关切尤为突出.方程思想的精髓是守恒,“恒”就是在变化中保持相对不变的关系^[2].能否领悟到或感知到物理情境中的守恒关系,这是解决疑难问题的核心.而图像无疑是表达守恒关系最为形象和直接的方式.只有在日常的教学中有计划、有目的、有方法,且矢志不渝地追求对物理守恒思想的渗透,特别是对图像解题方法的关注和使用,才能在中考“一仗”中攻克“悟理”的战略高地.

4.3 巧解 变中寻不变

复杂运算的背后是相对“简单”的物理或数学原理,简单运算的背后是相对“复杂”的物理或数学原理^[3].如例题1中滑动变阻器滑片的3次变化,不仅要关注变化中的功率数量关系,更要对前一次变化和后一次变化进行多视角的比较,深究引起电功率变化的物理量是什么(电阻),前后变化过程中这个物理量(电阻)是如何发生变化的,从而做到在变中寻不变,进而用巧妙的方法有效规避试题的运算难度,提高对问题的认识.

5 结束语

“五考”合一后,新疆物理中考试题改变了过去传统过度关注知识本位的评价意识,体现了学科能力导向的命题趋势^[4-5].因此,无论是物理教师还是学生,都势必要聚焦学科能力的培养和发展,把全面发展核心素养放在物理教与学的第一位,用与时俱进的眼光设计教学,用创新发展的思维指导教学,用实事求是的科学态度实践教学^[6].

参考文献

- [1] 杨清华.一道物理中考试题给我们的教学启示[J].物理之友,2014(11):39-41.
- [2] 黄杰,张倩茹.课程标准评价下2019年中考物理新疆卷的分析与启示[J].物理教师,2020(2):52-56.
- [3] 汪小龙.强化课前教学预测深化物理核心概念[J].中学物理教学参考,2021(32):7-8.
- [4] 汪小龙.新疆“五考合一”背景下物理中考试题的命题特点及教学启示[J].湖南中学物理,2022(7):68-70,94.
- [5] 汪小龙.新疆“五考合一”背景下物理中考试题中压强类问题的命题特点及教学启示[J].物理之友,2022(5).
- [6] 汪小龙.一道新疆中考物理考试试题中的“悟理”赏析[J].理科考试研究,2022(22):32-35.