

巧用数形结合 妙解物理问题

——例谈串联电路中可变电阻的电功率问题

于晓丽

(南京市金陵中学仙林分校中学部 江苏 南京 210046)

蒋新

(南京市栖霞区教师发展中心 江苏 南京 210046)

(收稿日期:2022-09-07)

摘要:理论推导串联电路中可变电阻的电功率的函数表达式,利用几何画板软件绘制串联电路中可变电阻的电功率 $P-I$ 、 $P-U$ 、 $P-R$ 函数曲线,分析曲线的规律和特点,找出各曲线的特殊点坐标及对应的物理意义,对比不同曲线间特殊点之间的联系,总结解题的技巧和规律,并进行中考真题的实例检验.

关键词:数形结合;可变电阻的 $P-I$ 、 $P-U$ 、 $P-R$ 曲线;特殊点;理论推导

1 问题呈现

在初三电学教学和相关试题中,发现这样一类问题,即由定值电阻和可变电阻(常是滑动变阻器)串联的动态电路中,问可变电阻的电功率 P 最大值为多少或者可变电阻电功率的函数图像是什么样的,还有围绕图像给出特殊点让进行相关计算的,是学生解题过程中面临的难点问题,常常学生要经历很复杂的数学计算才能得出结果,那么可变电阻电功率的函数图像到底是什么形状、有何规律可寻,在今后解题中有没有巧妙解法,笔者尝试对这类问题做一些探讨.

2 数学探究

在如图1所示的电路中,电源电压保持不变, R_1 是定值电阻, R_2 是可变电阻,调节电阻 R_2 的阻值时,电压表、电流表示数都会随之变化,设电源电压为 $U_{\text{总}}$.

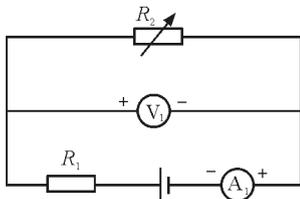


图1 数学探究题图

2.1 可变电阻 $P-I$ 的关系

根据串联电路特点和欧姆定律可得,可变电阻的电功率 P 与电路中电流 I 的函数表达式为

$$P = I^2 R_2 = P_{\text{总}} - P_{R_1} = U_{\text{总}} I - I^2 R_1 = -R_1 \left(I - \frac{U_{\text{总}}}{2R_1} \right)^2 + \frac{U_{\text{总}}^2}{4R_1}$$

通过配方可知可变电阻的电功率 P 是一个关于 I 的二次函数(开口向下的抛物线),利用几何画板作出其函数曲线(图2).

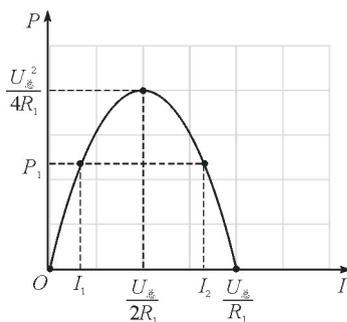


图2 可变电阻 $P-I$ 图像

利用抛物线的对称关系可知有2个特点:

- (1) 可变电阻电功率有最大值为 $\frac{U_{\text{总}}^2}{4R_1}$,此时电路中电流 $I = \frac{U_{\text{总}}}{2R_1}$;
- (2) 在函数图线上对于同一个 P_1 , I 有对应的2

个取值,对应电路有2个状态 I_1 和 I_2 ,且

$$I_1 + I_2 = 2 \times \frac{U_{\text{总}}}{2R_1}$$

2.2 可变电阻 $P-U$ 的关系

根据串联电路特点和欧姆定律可得,可变电阻的电功率 P 与其两端电压 U 的函数表达式为

$$P = UI = U \frac{U_{\text{总}} - U}{R_1} = -\frac{\left(U - \frac{U_{\text{总}}}{2}\right)^2}{R_1} + \frac{U_{\text{总}}^2}{4R_1}$$

通过配方可知可变电阻的电功率 P 是一个关于 U 的二次函数(开口向下的抛物线),利用几何画板作出其函数曲线(图3)。

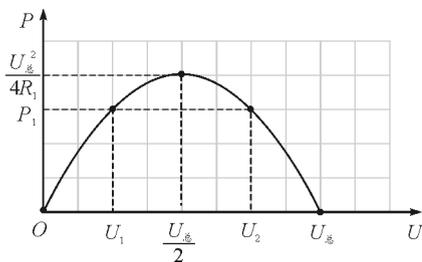


图3 可变电阻 $P-U$ 图像

利用抛物线的对称关系可知有2个特点:

(1) 可变电阻电功率有最大值为 $\frac{U_{\text{总}}^2}{4R_1}$,此时可变

电阻两端的电压值为 $U = \frac{U_{\text{总}}}{2}$;

(2) 在函数图线上对于同一个 P_1 , U 有对应的2个取值,对应电路有2个状态 U_1 和 U_2 ,且

$$U_1 + U_2 = 2 \times \frac{U_{\text{总}}}{2}$$

2.3 可变电阻 $P-R_2$ 的关系

根据串联电路特点和欧姆定律可得,可变电阻

的电功率 P 与其电阻 R 的函数表达式为

$$P = I^2 R_2 = \left(\frac{U_{\text{总}}}{R_1 + R_2}\right)^2 R_2 = \frac{U_{\text{总}}^2}{(R_1 + R_2)^2} =$$

$$\frac{U_{\text{总}}^2}{(R_2 - R_1)^2 + 4R_1} = \frac{U_{\text{总}}^2}{\frac{R_1^2}{R_2} + R_2 + 2R_1}$$

通过配方可知可变电阻的电功率 P 和其自身电阻值 R_2 函数关系是类似于开口向下的抛物线,利用几何画板作出其函数曲线(图4)。

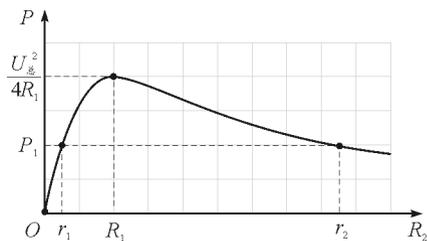


图4 可变电阻 $P-R_2$ 图像

结合函数的单调性分析可知有2个特点:

(1) 可变电阻电功率有最大值为 $\frac{U_{\text{总}}^2}{4R_1}$,此时可变

电阻的电阻值恰好等于电路中的定值电阻阻值,即 $R_2 = R_1$;

(2) 在函数图线上对于同一个 P_1 , R_2 有对应的2个取值,对应电路有2个状态 r_1 和 r_2 ,且满足

$$r_1 r_2 = R_1^2$$

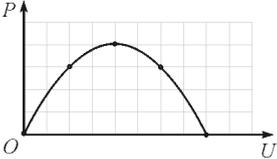
3 归纳总结

(1) 将可变电阻的3个图像放在一起对比发现(表1),对于给定的定值电阻 R_1 和可变电阻 R_2 组成的串联电路中,当在求解可变电阻电功率的最大值时都可以直接用 $\frac{U_{\text{总}}^2}{4R_1}$ 来求解。

表1 可变电阻电功率的3个图像共有的特点

图像	串联电路可变电阻电功率的最大值	3个图像中电功率取最大值时对应的横坐标值
可变电阻 $P-I$ 的图像 	$P_{\text{最大}} = \frac{U_{\text{总}}^2}{4R_1}$	$I = \frac{U_{\text{总}}}{2R_1}$

续表 1

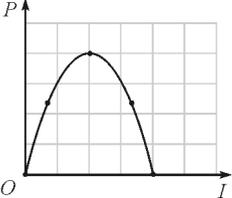
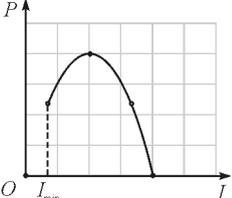
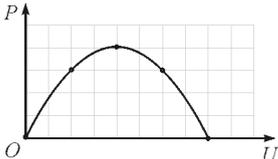
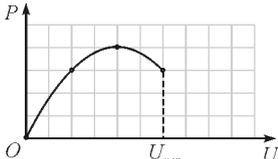
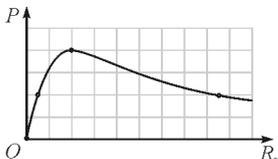
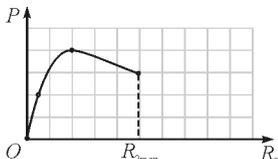
图像	串联电路可变电阻电功率的最大值	3 个图像中电功率取最大值时对应的横坐标值
可变电阻 $P-U$ 的图像 	$P_{\text{最大}} = \frac{U_{\text{总}}^2}{4R_1}$	$U = \frac{U_{\text{总}}}{2}$
可变电阻 $P-R_2$ 的图像 		$R_2 = R_1$

(2) 对于可变电阻的类型需讨论说明

若可变电阻是电阻箱,电阻值可实现从零到无穷大的变化,可变电阻电功率的 3 个图像形状是上

述表 1 的 3 幅图;但若可变电阻是滑动变阻器,其最大阻值限定为 R_0 ,则上述 3 个函数图像的在横坐标的取值范围会有变化,分析如表 2 所示。

表 2 两种类型的可变电阻电功率的 3 个图像区分

类型	电阻箱	滑动变阻器
可变电阻 $P-I$ 的图像 		$I_{\text{min}} = \frac{U_{\text{总}}}{R_1 + R_0}$
可变电阻 $P-U$ 的图像 		$U_{\text{max}} = \frac{R_0 U_{\text{总}}}{R_1 + R_0}$
可变电阻 $P-R_2$ 的图像 		$R_{2\text{max}} = R_0$

4 实例应用

类型 1: $P-I$ 图像试题

【例 1】(2021 年辽宁中考真题) 如图 5(a) 所示的电路中,电源电压保持不变, R_0 为定值电阻, R 为

滑动变阻器. 闭合开关 S, 移动滑片 P , 滑动变阻器消耗的电功率与电流关系的图像如图 5(b) 所示. 则()

- A. 滑动变阻器的最大阻值是 20Ω
- B. 滑动变阻器消耗的电功率最大时, 变阻器的

阻值是 $10\ \Omega$

C. 电源电压为 $8\ \text{V}$

D. 电路消耗的最大电功率为 $14.4\ \text{W}$

解析: 本题的正常解题思路是, 结合图像给出的两个点对应的电流、功率, 求出对应点电压, 用电源电压不变方程列式求解. 但是这种解法较为繁琐, 若是通过数形结合, 应用可变电阻 $P-I$ 图像的规律解题则起到事半功倍的效果. 比如根据图 5(b) 结合规律特点, 可知

$$P_{\text{最大}} = \frac{U_{\text{总}}^2}{4R_0} = 3.6\ \text{W}$$

$$I = \frac{U_{\text{总}}}{2R_0} = 0.6\ \text{A}$$

由上述两式解得

$$U_{\text{总}} = 12\ \text{V} \quad R_0 = 10\ \Omega$$

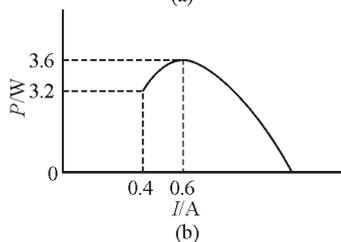
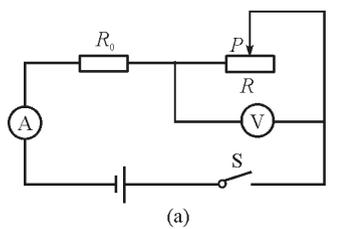


图 5 例 1 题图

这种解法类似数学中二次函数求解根的表达式, 可以快速解出电源电压和定值电阻, 其他问题依次可求解得. 下面两种题型同样如此, 不再赘述.

类型 2: $P-U$ 图像试题

【例 2】 如图 6(a) 所示的电路中, 电源电压为 $18\ \text{V}$, 保持不变. 闭合开关 S 后, 电压表示数为 $1\ \text{V}$, 电流表示数为 $0.1\ \text{A}$. 在移动变阻器 R_2 滑片过程中, 变阻器 R_2 的电功率 P_2 与电压表示数 U_1 的关系如图 6(b) 所示, 求 U_0 的值.

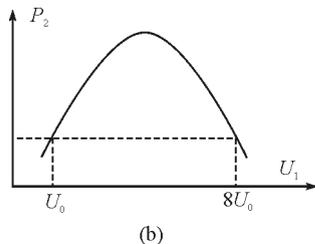
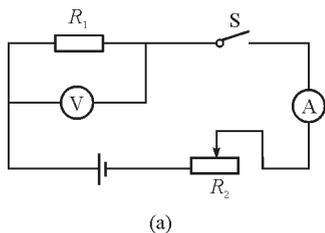


图 6 例 2 题图

解析: 本题原解法根据图 6(b) 当电压表示数为 U_0 和 $8U_0$ 时功率相等列等式求解出 U_0 的值, 是计算难点. 现在根据图 6(b) 结合可变电阻的 $P-U$ 图像规律特点, 可知: 在函数图线上对于同一个 P_1 , U 有对应的 2 个取值, 对应电路有 2 个状态 U_1 和 U_2 , 且 $U_1 + U_2 = 2 \times \frac{U_{\text{总}}}{2}$.

$$\text{所以可得 } U_0 + 8U_0 = 2 \times \frac{U_{\text{总}}}{2}$$

可求得 $U_0 = 2\ \text{V}$

类型 3: $P-R$ 图像试题

【例 3】 (2022 年丹东中考真题) 如图 7(a) 所示电路中, 电源电压恒定, R_1 为定值电阻, $R_2 = 10\ \Omega$, 滑动变阻器 R_3 的阻值变化范围为 $0 \sim 50\ \Omega$. 闭合开关, 滑动变阻器滑片从一端向另一端移动过程中, 滑动变阻器的电功率随其电阻变化的图像如图 7(b) 所示. 则 ()

- A. 电源电压为 $9\ \text{V}$
- B. 滑动变阻器最大功率为 $0.45\ \text{W}$
- C. 电路工作时总功率最大值与最小值之比为 $7:2$
- D. 电压表示数的变化量与电流表示数的变化量之比变大

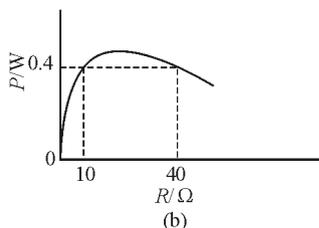
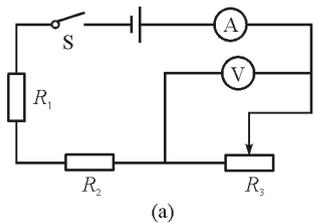


图 7 例 3 题图

解析:本题虽然是3个电阻的串联,但仍可以把定值电阻 R_1 和 R_2 看作一个整体,当成一个定值电阻和滑动变阻器串联的模型电路.根据可变电阻的 $P-R$ 图像规律特点:在函数图线上对于同一个 P_1 , R_2 有对应的2个取值,满足 $r_1 r_2 = R_1^2$,可得 $10 \times 40 = (R_1 + R_2)^2$,即 $R_1 + R_2 = 20 \Omega$,所以 $R_1 = 10 \Omega$.从而可以任选图像上一点快速计算出电源电压为6V,也可通过规律公式 $P_{\text{最大}} = \frac{U_{\text{总}}^2}{4R_0}$ 求解出滑动变阻器的最大功率,省去重复的多次推导过程.

5 结束语

在电学教学中,通过对电功率公式的推导,将可变电阻的电功率与电压、电流、电阻等物理量之间的关系用图像直观表示出来.而在求解可变电阻的电功率问题时,巧妙运用数形结合的思想,不仅直观易发现解题途径,而且能避免复杂的计算与推理,优化了解题过程,妙解物理问题.“数形结合”实现了抽

(上接第62页)

5 结束语

怎样把课程内容与思政元素有机融合,达到“润物无声、如盐入水”的课程思政教育效果和取得好的教学成效是我们追求的目标.这就需要在教学实践中不断探索、创新,“教学”与“教育”并行,既丰富课程内容,亦达到培根铸魂的目的,这些才是我们所追求的.

象思维与形象思维相结合^[1],一定程度上提高了学生获取信息、识别图像、处理数据、物理建模的能力^[2],开拓了学生的思维视野,锤炼了学生的思维品质.教师在实际教学中要有意识地培养学生这种思想意识,争取让学生心中有图,见数想图,引导学生思考同类题型解题过程中的共同特点,积累解题经验,总结科学规律,通过解题反思做到一题多解、一题多变、多题归一.当然研究好此类图像对于出题者在问题呈现的科学性上也有很好的指导,反观现在某些教辅材料围绕可变电阻电功率的图像题有的带有一些科学性错误,值得一线教师带着批判性思维去深入研究.

参考文献

- [1] 张其林.巧用数形结合 助力物理解题——以复杂物理问题的处理为例[J].中学物理,2022,40(1):51-52.
- [2] 孙成.数形结合,突破电路中的图像问题[J].物理教学探讨,2014,32(5):41-44.

参考文献

- [1] 王青.课程思政背景下面向未来的课程建设[J].物理与工程,2021,31(5):1-4.
- [2] 郭奕玲,沈慧君.物理学史[M].北京:清华大学出版社,2005.
- [3] 韩维正,刘乐艺.“人造太阳”离圆梦又近一步——揭秘中国可控核聚变[J].中国产经,2020(1):60-63.
- [4] 科技舆情分析研究所.人造太阳:“中国聚变梦”需分三个阶段走[J].今日科技,2019(2):14-16.

Exploration on the Integration of Ideological and Political Elements into the “Thermology” Module of University Physics

MU Lijuan HAN Xianggang WANG Funing NIU Jinyan

(School of Science, Inner Mongolia University of Science and Technology, Baotou, Inner Mongolia 014010)

Abstract: The article analyzes in detail the important knowledge points integrating ideological and political elements in the thermology module of university physics. The mutual promotion and coordinated development relationship between curriculum learning and ideological and political education is formed, which greatly helps students understand thermal knowledge and the concept of natural science development and cultivates students' scientific literacy and patriotism.

Key words: thermology; ideological and political elements; scientific literacy; patriotism