



一个极值问题的讨论及结论的应用

代建山

(新疆博乐市高级中学 新疆 博乐 833400)

(收稿日期:2022-09-16)

摘要:高中物理中质点间的万有引力和真空中点电荷间的库仑力都遵循平方反比规律,质量相同的两质点连线中垂线上及等量同种电荷连线中垂线上存在极值问题,通过不等式和求导的方法解决极值的位置并进行适当推广.

关键词:万有引力;库仑力;极值

在高中物理的力学和电学问题中,质点间的万有引力和真空中点电荷间的库仑力都遵循平方反比规律.在这类问题中,作用力的极值问题往往是一个难点.下面我们讨论这样一类问题^[1].

问题 1:如图 1 所示,A、B 为质量均匀分布且质量均为 M 的两个完全相同的小球. PQ 为 AB 连线的中垂线.有一质量为 m 的小球从 AB 连线的中点 O 沿 OP 方向运动,小球 m 受到 A、B 万有引力的合力最大值在何处? 引力大小的变化情况是怎样的?

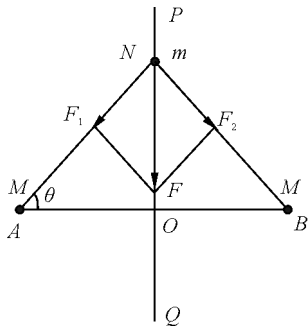


图 1 问题 1 图

解法一:

设 m 位于距 O 点 r 处的 N 点, $OA = OB = a$, 则有

$$AN = \sqrt{a^2 + r^2}$$

根据万有引力定律, m 在 N 点受到 A、B 两球的万有引力 F_1 、 F_2 为

$$F_1 = F_2 = \frac{GMm}{AN^2} = \frac{GMm}{a^2 + r^2}$$

由平行四边形定则可求出 F_1 和 F_2 的合力 F 大小

而

所以有

令

则

设

则有

$$F = 2F_1 \sin \theta$$

$$\sin \theta = \frac{r}{\sqrt{a^2 + r^2}}$$

$$F = \frac{2GMmr}{(\sqrt{a^2 + r^2})^3}$$

$$Z = \frac{r}{(\sqrt{a^2 + r^2})^3}$$

$$Z^2 = \frac{r^2}{(r^2 + a^2)^3}$$

$$Y = Z^2 \quad X = r^2$$

$$Y = \frac{X}{(X + a^2)^3} = \frac{X}{X^3 + 3X^2a^2 + 3Xa^4 + a^6} = \frac{1}{X^2 + 3Xa^2 + 3a^4 + \frac{a^6}{X}}$$

上式中的分母中

$$X^2 + 3Xa^2 + \frac{a^6}{X} =$$

$$X^2 + \frac{Xa^2}{2} + \frac{Xa^2}{2} + \frac{Xa^2}{2} +$$

$$\frac{Xa^2}{2} + \frac{Xa^2}{2} + \frac{Xa^2}{2} + \frac{a^6}{8X} + \frac{a^6}{8X} + \frac{a^6}{8X} +$$

$$\frac{a^6}{8X} + \frac{a^6}{8X} + \frac{a^6}{8X} + \frac{a^6}{8X} + \frac{a^6}{8X}$$

根据不等式

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

不等式中 $a_1、a_2、a_n$ 均为正数;仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立,有

$$X^2+3Xa^2+\frac{a^6}{X}\geqslant 15\cdot\sqrt[15]{X^2\left(\frac{Xa^2}{2}\right)^6\left(\frac{a^6}{8X}\right)^8}$$

当 $X^2=\frac{Xa^2}{2}=\frac{a^6}{8X}$ 时,亦即 $X=\frac{a^2}{2}$ 时, $X^2+3Xa^2+\frac{a^6}{X}$ 有最小值,且最小值为 $\frac{15a^4}{4}$.

由于 $X=r^2$,所以有 $r^2=\frac{a^2}{2}$,解之得到 $r=\frac{a}{\sqrt{2}}$,也就是当 $r=\frac{a}{\sqrt{2}}$ 时, Y 的分母部分有最小值, Y 也就有最大值,因而 Z 有最大值,进一步可算得 F 的最大值为

$$F_{\max}=\frac{4\sqrt{3}GMm}{9a^2}$$

当 m 从 O 点开始沿 OP 移动到无穷远时, m 所受的万有引力由零增大到最大值 $\frac{4\sqrt{3}GMm}{9a^2}$ 后再逐步减小到零.

另外,在直角 $\triangle OAN$ 中,设 $\angle NAO$ 为 θ . 当 $r=\frac{a}{\sqrt{2}}$ 时 F 有最大值,此时 $\tan\theta=\frac{r}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}$,由三角变换公式可得

$$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}\qquad\cos^2\theta=\frac{2}{3}$$

即
$$\theta=\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$$

时 F 有最大值

$$F_{\max}=\frac{4\sqrt{3}GMm}{9a^2}$$

解法二:
设 m 在 N 点受 $A、B$ 两球的万有引力分别为 $F_1、F_2$,根据万有引力定律

$$F_1=F_2=\frac{GMm}{a^2+r^2}$$

因为
$$AN=\frac{a}{\cos\theta}$$

所以
$$r^2+a^2=\frac{a^2}{\cos^2\theta}$$

$$F_1=F_2=\frac{GMm\cos^2\theta}{a^2}$$

$F_1、F_2$ 的合力 F 为

$$F=\frac{2GMm\cos^2\theta\sin\theta}{a^2}$$

令
$$Y=\cos^2\theta\sin\theta$$

因为

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$$

所以有

$$Y=(1-\sin^2\theta)\sin\theta$$

设 $U=\sin\theta$,则

$$Y=(1-U^2)U=U-U^3$$

分别对 Y 求一阶导数 Y' 和二阶导数 Y'' ,有

$$Y'=1-3U^2$$

$$Y''=-6U$$

令 $Y'=0$ 有 $1-3U^2=0$,解得

$$U=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

将上式代入 Y'' ,有

$$Y''=-\frac{6}{\sqrt{3}}<0$$

所以当 $U=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时, Y 有最大值,也就是 F 有最大值.

由于

$$U=\sin\theta$$

所以有 $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$,即 $\theta=\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时 F 有最大值

$F_{\max}$. 将 $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 及 $\cos^2\theta=\frac{2}{3}$ 代入 F 的表达式,有

$$F_{\max}=\frac{4\sqrt{3}GMm}{9a^2}$$

问题 2:如图 2 所示,两个等量的正电荷 Q 相距 $2a$,试确定在两个电荷连线的垂直平分线上具有最大场强的点的位置.

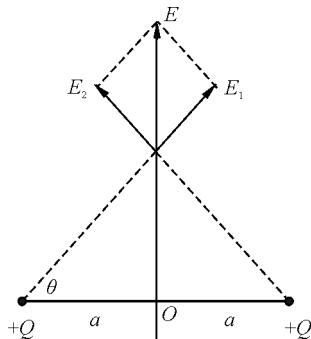


图 2 问题 2 图

解析:具体解答与问题 1 完全类似,极值点的位

置在中垂线上距中心点 $\frac{a}{\sqrt{2}}$ 处,场强的最大值为

$$E_{\max} = \frac{4\sqrt{3}kQ}{9a^2}$$

【例 1】如图 3 所示,水平光滑的绝缘木板上 O 点的正上方固定一正点电荷,其电荷量为 Q , a 、 b 、 c 为木板上以 O 为圆心的 3 个等间距同心圆.现将一带正电的小球 P 从木板上 O 点附近静止释放,小球依次经过 a 、 b 、 c 位置,其电势能分别为 E_{p1} 、 E_{p2} 、 E_{p3} ;其加速度分别为 a_1 、 a_2 、 a_3 ,忽略 P 对电场的影响,下列说法中正确的是()

- A. a 、 b 、 c 三处的电势大小关系为 $\varphi_a > \varphi_b > \varphi_c$
- B. a 、 b 间的电势差与 b 、 c 间的电势差大小关系为 $U_{ab} > U_{bc}$
- C. 小球 P 在 a 、 b 、 c 位置处的电势能的大小关系为 $E_{p1} < E_{p2} < E_{p3}$
- D. 小球 P 在 a 、 b 、 c 位置处的加速度的大小关系为 $a_1 > a_2 > a_3$

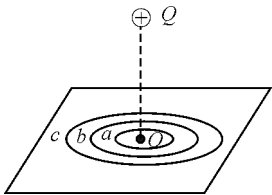


图 3 例 1 题图

解析:运用问题 2 的结论结合已知条件进行分析.

在 Q 关于 Oc 直线的对称点放上另一个等量同种电荷 Q' ,则 Q 和 Q' 在周围的空间形成等量同种电荷的电场,且 Oc 直线是两等量同种电荷连线的中垂线.由前面的结论可知:从 O 点沿直线 Oc 直至无穷远,等量同种电荷的总电场强度 E 的方向向左,大小由零逐渐增大到最大值再逐渐减小到零.由于对称, Q 和 Q' 在 a 、 b 、 c 每一点产生的电场强度的水平分量方向向左且大小一样,即 Q 在 a 点的场强的水平分量和 Q' 在 a 点的场强的水平分量方向相同大小一样, b 点和 c 点两点的情况类似.所以, Q 单独在直线上 a 、 b 、 c 各点场强的水平分量方向向左且大小从 零逐渐增大到最大值再逐渐减小到零.场强最大值的位置与 a 、 b 、 c 三点的位置关系不清楚,所以 a 、 b 、 c 三点的水平方向的加速度大小关系无法确定,且 U_{ab} 与 U_{bc} 间的关系也无法确定.本题的其他选项的讨论略去,答案是选项 A.

【例 2】带电荷量为 q 的负点电荷(不计重力)在等量同种带电荷量为 Q 的两正点电荷连线中垂面上以 O 为中心做圆周运动,如图 4 所示,当 r 为多大时线速度最大?

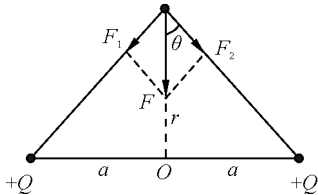


图 4 例 2 题图

解析:由牛顿第二定律得

$$\frac{2kQq}{\left(\frac{a}{\sin \theta}\right)^2} \cos \theta = m \frac{v^2}{r} = m \frac{v^2}{a \cot \theta}$$

可得

$$v^2 = \frac{2kQq}{ma} \sin \theta \cos^2 \theta$$

对上式利用求极值的方法,可求得

$$\cot \theta = \sqrt{2} \quad \cos^2 \theta = \frac{2}{3}$$

时,即 $r = \sqrt{2}a$ 时,线速度最大为

$$v_m = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\sqrt{3}kQq}{ma}}$$

在上述问题的证明中,我们还发现 $\cos^2 \theta = \frac{2}{3}$,

在解决一些极值问题时,也是一个很有用的结论.

【例 3】如图 5 所示,细线的一端固定,另一端系一小球,把细线拉至水平位置使小球从静止开始释放,不计空气阻力,在小球从最高点 A 摆至最低点 B 的过程中,下列说法中正确的是()

- A. 重力的功率一直增大
- B. 重力的功率一直减小
- C. 重力的功率先增大后减小
- D. 重力的功率先减小后增大

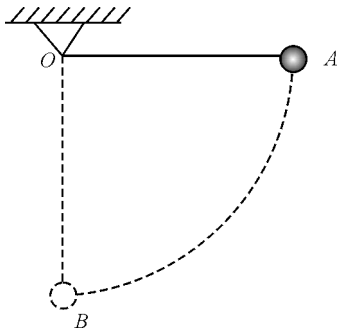


图 5 例 3 题图

解析:这道题利用功率的定义可得答案为选项 C,但小球在什么位置重力的功率最大呢?如图 6 所示,设细线与水平方向成 θ 角时,小球的重力功率最大,由动能定理

$$mgL \sin \theta = \frac{1}{2}mv^2$$

得
$$v = \sqrt{2gL \sin \theta}$$

由功率的定义

$$P = mg \sqrt{2gL \sin \theta} \cos \theta$$

而

$$\begin{aligned} \sqrt{(\sin \theta \cos^2 \theta)^2} &= \sqrt{\sin^2 \theta \cos^2 \theta \cos^2 \theta} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}(2 - 2\cos^2 \theta)\cos^2 \theta \cos^2 \theta} \end{aligned}$$

当 $2 - 2\cos^2 \theta = \cos^2 \theta$ 时,重力功率具有最大值,即 $\cos^2 \theta = \frac{2}{3}$ 时

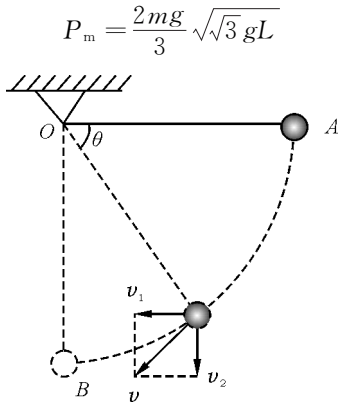


图 6 例 3 解析图

【例 4】图 7 所示为某工厂的传送装置简易图,该装置由倾斜轨道 ab 、圆弧形轨道 bc 、水平轨道 cd 、接收装置 PQ 构成,其中 PQ 为半径 $R = 1\text{ m}$ 的圆弧形接收装置,圆心刚好位于轨道的边缘点(d 点),除 bc 段外其余部分均粗糙,图中的虚线 Ob 、 Oc 为圆弧 bc 的半径.现将一质量 $m = 0.5\text{ kg}$ 且可视为质点的滑块由 a 点无初速度释放,释放瞬间在滑块上施加一垂直 ab 向下的恒力 $F = 9\text{ N}$,当滑块刚好越过 b 点时将恒力撤去,已知 $\theta = 53^\circ$, ab 段的长度为圆弧 bc 半径的 2 倍,滑块与倾斜轨道间的动摩擦因数 $\mu = 0.25$,重力加速度 $g = 10\text{ m/s}^2$, $\sin 53^\circ = 0.8$, $\cos 53^\circ = 0.6$.

(1) 求滑块刚到达 c 点时,对轨道的压力大小;

(2) 如果改变倾斜轨道的长度以及恒力的大小,使得滑块每次从 a 点无初速度释放后,均能落在接收装置 PQ 上,则滑块落在接收装置上的最小动能应为多少?

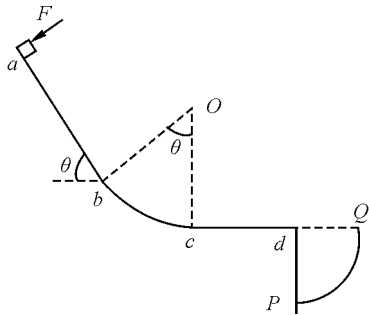


图 7 例 4 题图

解析:该题第(2)问求解滑块落到接收装置的最小动能,如图 8 所示,滑块在 d 点以 v_0 速度水平抛出,落点为 H 点, dH 连线与水平方向成 α 角,由平抛知识可知

$$x = R \cos \alpha = v_0 t$$

$$y = R \sin \alpha = \frac{1}{2}gt^2$$

可得

$$v_0^2 = \frac{gx^2}{2y}$$

由动能定理得

$$E_k = mgy + \frac{1}{2}mv_0^2 = mgy + \frac{mgx^2}{4y}$$

即

$$E_k = \frac{4\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{4\sin \alpha}mgR = \frac{3\sin^2 \alpha + 1}{4\sin \alpha}mgR$$

$$E_k = \frac{mgR}{4} \left(3\sin \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} \right)$$

当

$$3\sin \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

即

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{3}$$

时,得 $\cos^2 \alpha = \frac{2}{3}$,此时滑块动能最小为

$$E_{k\min} = \frac{\sqrt{3}}{2}mgR$$

得

$$E_{k\min} = \frac{5\sqrt{3}}{2}\text{ J}$$

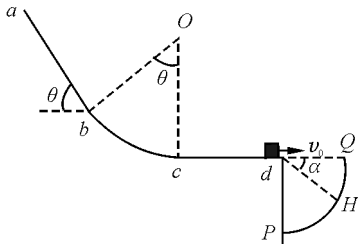


图 8 例 4 解析图

参考文献

[1] 郭健. 高中物理竞赛知识讲座[M]. 西安:陕西人民教育出版社,1992.