



# 平方反比有心力场中的 3 个抛体包络线及其证明

李忠相

(重庆市第一中学校 重庆 400030)

(收稿日期:2022-10-10)

**摘要:**本文给出在平方反比有心力场中 3 个抛体包络线并给出简洁证明:一是平方反比引力场中,从定点同速率向同一平面内不同方向抛出物体的椭圆轨迹的包络线也为椭圆;二是平方反比斥力场中,从定点同速率向同一平面内不同方向抛出物体的双曲线轨迹的包络线也是双曲线;三是平方反比斥力场中,从过力心的同一平面内远处同方向同速率不同瞄准距离入射物体的双曲线轨迹的包络线为抛物线.

**关键词:**平方反比;有心力场;抛体运动;包络线

在几何学里,一个曲线族的包络线是跟该曲线族的每条线都至少一点相切的一条曲线.在很多物理问题中,也用到包络线的概念.

比如,在均匀重力场中,空中某一定点以相同速率向各个方向抛出物体,如果只考虑重力,物体运动轨迹均为抛物线,所有这些抛物线的包络线也是一条抛物线,如图 1 所示.若抛体初速度大小为  $v_0$ ,重力加速度为  $g$ ,将抛出点记为坐标原点,水平向右为  $x$  轴正方向,竖直向上为  $y$  轴正方向,包络线的方程为

$$y = -\frac{g}{2v_0^2}x^2 + \frac{v_0^2}{2g} \quad (1)$$

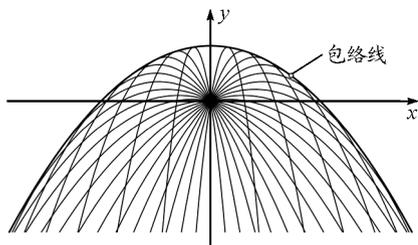


图 1 均匀重力场中抛体轨迹及其包络线

这是大家熟知的结论,证明从略.下面介绍 3 个平方反比有心力场中的抛体包络线,并给出简洁的证明.

**包络线 1:**平方反比引力场中,从定点同速率向同一平面内不同方向抛出物体的椭圆轨迹的包络线也为椭圆.

以地球(质量记为  $M$ 、半径为  $R$ ,万有引力常量为  $G$ )的引力场为例,在离地球表面  $h$  高度处的同一点以相同的速率  $u$  向各个方向抛出大量小物体,只要初始速率  $u$  不太大,这些小物体都绕地球做椭圆运动,这些椭圆轨迹的包络线也是椭圆,如图 2 所示.

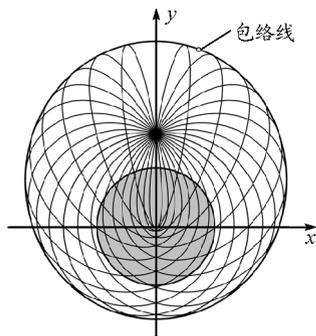


图 2 平方反比引力场中椭圆的包络线

**证明:**

易知,所有小物体具有相同的机械能,于是它们的轨迹具有相同的半长轴  $a$ ,由椭圆轨迹的能量公式

$$\frac{1}{2}mu^2 - \frac{GMm}{R+h} = -\frac{GMm}{2a} \quad (2)$$

得

$$a = \frac{GM(R+h)}{2GM - u^2(R+h)} \quad (3)$$

小物体轨迹为椭圆要求初始速率  $u$  的范围为

$$u < \sqrt{\frac{2GM}{R+h}} \quad (4)$$

显然,地心  $O$  为所有轨迹的一个公共焦点  $F_1$ ,若将抛出点记为  $A$ ,由于抛出点是椭圆轨迹上的一点,它到两焦点的距离之和为  $2a$ ,所以另一个焦点  $F_2$  与  $A$  的距离  $r$  为

$$r = 2a - (R + h) \quad (5)$$

所有可能的  $F_2$  点在纸平面内构成一个圆,如图3中虚线圆所示.对于圆周上任意一个  $F_2$  点对应的轨迹如图3中实线椭圆.在轨迹上的任何一点  $P$ ,到  $A$  点和到  $O(F_1)$  点的距离之和有

$$\overline{PA} + \overline{PF_1} \leq \overline{AF_2} + \overline{PF_2} + \overline{PF_1} = r + 2a \quad (6)$$

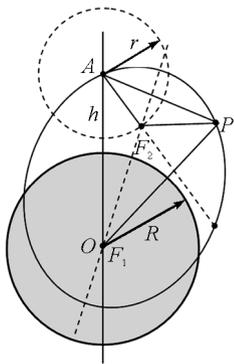


图3 轨迹分析图

式中第一个小于等于是因为三角形的一边小于另两边之和,当3段线段共线时取等于;第二个等于再次利用了椭圆上的点到两焦点距离之和为  $2a$ .当  $P$  点在  $AF_2$  延长线上时取等于.上式表明,任意一个轨迹上任意一点到两个定点 ( $A, O$ ) 的距离之和小于等于一个定值,也就是说所有轨迹上的所有点都在一个椭圆范围之内,这个边界椭圆就是所有轨迹的包络线,  $A$  点和  $O$  点就是这个椭圆的焦点.对于任一特定的轨迹,  $AF_2$  连线上的  $P$  就是刚好处于包络上的点.于是可以写出这个包络线椭圆的半长轴  $a_0$ 、半焦距  $c_0$  以及半短轴  $b_0$  为

$$a_0 = \frac{r + 2a}{2} \quad (7)$$

$$c_0 = \frac{R + h}{2} \quad (8)$$

$$b_0 = \sqrt{a_0^2 - c_0^2} \quad (9)$$

若以地心  $O$  为坐标原点,  $OA$  方向为  $y$  轴正方向,垂直于  $OA$  向右为  $x$  轴正方向,则包络线的方程为

$$\frac{x^2}{b_0^2} + \frac{(y - c_0)^2}{a_0^2} = 1 \quad (10)$$

**包络线 2:**平方反比斥力场中,从定点同速率向同一平面内不同方向抛出物体的双曲线轨迹的包络线也为双曲线.

以固定点电荷(电荷量记为  $+Q$ ) 的静电场为例,在离点电荷距离为  $d$  的同一点以相同的速率  $u$  向同一平面内各个方向发射质量为  $m$ 、电荷量为  $+q$  的粒子,这些带电粒子的轨迹均为双曲线,这些双曲线的包络线也是双曲线,如图4所示.

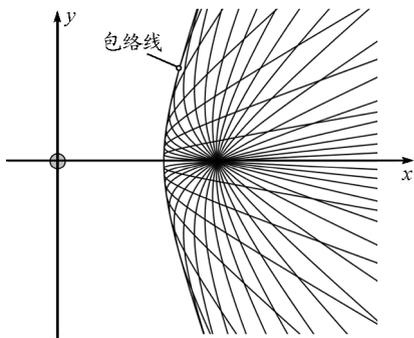


图4 平方反比斥力场中双曲线的包络线

**证明:**

易知,所有带电粒子具有相同的能量,于是它们的轨迹具有相同的半实轴  $a$ ,由双曲线轨迹的能量公式

$$\frac{1}{2} mu^2 + \frac{kQq}{2d} = \frac{kQq}{2a} \quad (11)$$

得

$$a = \frac{kQqd}{mu^2 d + kQq} \quad (12)$$

显然,固定点电荷所在处为所有轨迹的一个公共焦点  $F_1$ .如图5所示.

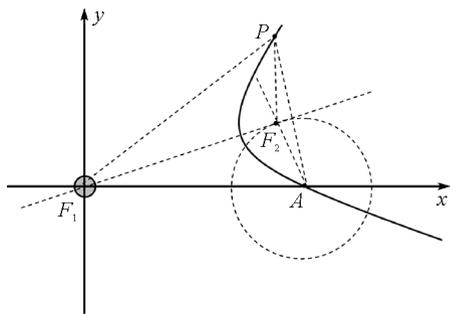


图5 平方反比斥力场中双曲线的包络线

将抛出点记为  $A$ ,选择其中任意一根双曲线轨迹,过  $F_1$  作轨迹的对称轴即为双曲线的实轴,实轴上存在另一个焦点  $F_2$ ,双曲线上的点到两焦点的距离之差为定值  $2a$ ,则  $A$  点和  $F_2$  之间的距离也为定

值,即

$$\overline{AF_2} = \overline{AF_1} - 2a = d - 2a \quad (13)$$

所有可能的  $F_2$  点在纸平面内构成一个圆,如图5中虚线圆所示.在轨迹上的任一点  $P$ ,到  $F_1$  点和到  $A$  点的距离之差有

$$\begin{aligned} \overline{PF_1} - \overline{PA} &\geq \overline{PF_1} - (\overline{PF_2} + \overline{AF_2}) = \\ &2a - (d - 2a) = 4a - d \end{aligned} \quad (14)$$

式中第一个大于等于是因为三角形的一边小于另两边之和,当3段线段共线时取等于;第二个等于再次利用了双曲线上的点到两焦点距离之差为  $2a$ .当  $P$  点在  $AF_2$  延长线上时取等于.上式表明,任意一个轨迹上任意一点到两个定点 ( $A, F_1$ ) 的距离之差大于等于一个定值,也就是说所有轨迹上的所有点都在一个双曲线的一支范围之内,这个边界双曲线就是所有轨迹的包络线,  $A$  点和  $F_1$  点就是这个双曲线的焦点.对于任一特定的轨迹,  $AF_2$  连线上的  $P$  就是刚好处于包络上的点.于是可以写出这个包络线双曲线的半实轴  $a_0$ 、半焦距  $c_0$  以及半虚轴  $b_0$  为

$$a_0 = \frac{4a - d}{2} \quad (15)$$

$$c_0 = \frac{d}{2} \quad (16)$$

$$b_0 = \sqrt{c_0^2 - a_0^2} \quad (17)$$

若以地心  $F_1$  为坐标原点,  $F_1A$  方向为  $x$  轴正方向,垂直于  $F_1A$  向上为  $y$  轴正方向,则包络线的方程为

$$\frac{(x - c_0)^2}{a_0^2} - \frac{y^2}{b_0^2} = 1 (x > 0) \quad (18)$$

**包络线3:**平方反比斥力场中,从过力心的同一平面内远处同方向同速率不同瞄准距离入射物体的双曲线轨迹的包络线为抛物线.

以固定点电荷(电荷量记为  $+Q$ ) 的静电场为例,如图6所示.

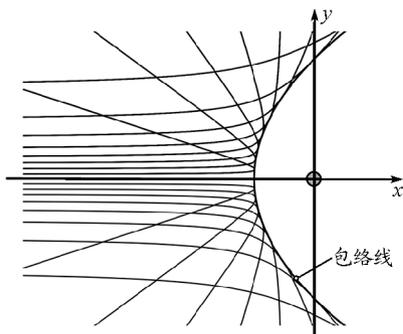


图6 平方反比斥力场中双曲线的包络线

在过点电荷的平面内从远处以相同的向右的速率  $u$  入射质量为  $m$ 、电荷量为  $+q$  的粒子,它们具有不同的瞄准距离  $b$ .这些带电粒子的轨迹均为双曲线,这些双曲线的包络线为抛物线.

**证明:**

易知,所有带电粒子具有相同的能量,于是它们的轨迹具有相同的半实轴  $a$ ,由双曲线轨迹的能量公式

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{kQq}{2a} \quad (19)$$

得

$$a = \frac{kQq}{mu^2} \quad (20)$$

显然,固定点电荷所在处为所有轨迹的一个公共焦点  $F_1$ .如图7所示,选择其中任意一根双曲线轨迹,过  $F_1$  作轨迹的对称轴即为双曲线的实轴,两条渐近线与实轴的交点即为中心  $O_1$ (图中未标出),  $F_1$  在实轴上关于  $O_1$  对称的点即为双曲线轨迹的另一个焦点  $F_2$ ,在与  $F_2$  距离  $2a$  且靠近入射方向作一条垂直于初速度的直线  $l$ .双曲线上任意一点  $P$  到焦点  $F_1$  和直线  $l$  的距离  $\overline{PB}$  长度之差有

$$\overline{PF_1} - \overline{PB} \geq \overline{PF_1} - (\overline{PF_2} + \overline{F_2A}) \quad (21)$$

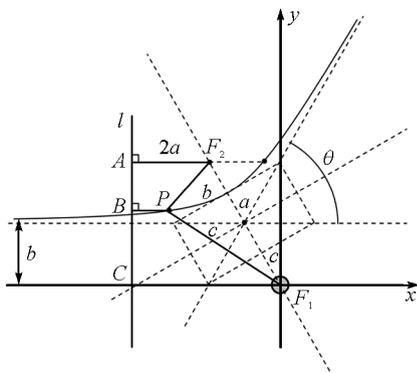


图7 轨迹分析图

式(21)右边

$$\begin{aligned} \overline{PF_1} - (\overline{PF_2} + \overline{F_2A}) &= \\ \overline{PF_1} - \overline{PF_2} - \overline{F_2A} &= 2a - 2a = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

于是

$$\overline{PF_1} - \overline{PB} \geq 0 \quad (23)$$

即该双曲线轨迹上任一点到一定点的距离和到一定直线的距离大于等于零,当  $P$  点在  $AF_2$  延长线上时取

等于. 如果把轨迹的偏转角记为  $\theta$ , 由双曲线的基本性质有

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{a}{c} \quad (24)$$

容易发现  $F_1$  和  $F_2$  连线与  $y$  轴的夹角也为  $\frac{\theta}{2}$ ,

于是直线  $l$  到  $F_1$  的距离为

$$\begin{aligned} \overline{F_1 C} &= 2a + F_1 F_2 \sin \frac{\theta}{2} = \\ &2a + 2c \cdot \frac{a}{c} = 4a \end{aligned} \quad (25)$$

式(25)为一与  $b$  无关的定值, 即对所有的轨迹来说, 直线  $l$  均为同一直线. 于是式(23)表明所有轨迹上的所有点到定点  $F_1$  的距离大于等于到定直线  $l$  的距离. 由几何性质可知, 到定点和定直线距离相等的点的轨迹组成一条抛物线, 这个定点就是抛物线的焦

点, 这条定直线就是抛物线的准线. 将焦点到准线的距离  $\overline{F_1 C}$  记为  $p$ , 在图7的坐标系中这条抛物线的方程为

$$y^2 = 2p \left( x + \frac{p}{2} \right) = 8a(x + 2a) \quad (26)$$

这就是所有这些双曲线轨迹的包络线方程, 其中  $a$  由式(20)确定.

### 参考文献

- [1] 宋辉武, 韩溥. 论包络线在物理学中的应用[J]. 物理教学, 2021, 43(8): 8-10.
- [2] 董慎行. 抛体包络线方程的推导及其应用例举[J]. 物理教师, 2007(12): 45-46.
- [3] 汤桂英, 王翠. 简论平流层及其以上高空中的抛体轨迹[J]. 延边大学学报(自然科学版), 1999(2): 67-68.

(上接第135页)

又是物理教学的基础, 在物理教学的整个过程中具有十分重要的作用, 所以核心素养下的物理实验教学要求学生亲身经历科学的探究过程, 学会在实验探究中总结提炼物理概念, 培养科学推理能力, 从而实现在教学过程中培养学生的核心素养, 达到质的提高.

综上所述, 物理实验属于一种能力考查题, 在物理学习过程中通过典型实验、典型试题的分析领悟实验设计的思路和方法, 明确实验目的, 理解实验原

理和实验方案. 学生需要正确的理论分析, 将理论和实验相结合分析实验原理和过程, 物理实验教学中可通过创设问题情境, 让学生思考应怎样设计实验, 为什么这样设计, 能否换一种方法. 在此基础上, 通过不同的实验方案, 深刻理解实验原理, 培养学生实验设计能力, 提升学生的物理学科素养.

### 参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中物理课程标准(2017年版)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2018.

## Analysis on Hebei Physics Experiment Questions in 2022 College Entrance Examination

WANG Xinying

(Baoding Second Middle School, Baoding, Hebei 071000)

**Abstract:** Experimental teaching plays an important role in middle school physics teaching. This paper takes Hebei physics experiment test questions in the 2022 college entrance examination as an example to analyze the physics subject knowledge examined by the experimental questions in the college entrance examination, the key abilities students need to have, and the guiding significance to physics experiment teaching.

**Key words:** university entrance exam; physics experiment questions; teaching reflection; discipline literacy