

牛顿环测量数据的不确定误差参数统计分析*

张 森 张 江 曹南斌

(河北地质大学数理教学部 河北 石家庄 050031)

(收稿日期:2022-10-23)

摘 要:牛顿环实验数据分析是大学物理实验中的重要问题,两种主要数据处理方法获得的牛顿环实验曲率半径通常存在着一定差异,且其测量误差不一定服从正态分布.为了准确估计曲率半径,需要更细致地对数据测量误差进行统计建模分析.频率学派不确定误差参数统计模型使用 Gamma 分布分析系统误差,具有对异常值不敏感的特性.基于牛顿环实际测量数据集,应用不确定误差参数统计模型可以得到更准确的牛顿环实验曲率半径估计值.

关键词:牛顿环;误差分析;参数估计;置信区间

1 引言

在大学物理实验中,最普遍的等厚干涉实验是牛顿环实验.最早的牛顿环实验是1675年牛顿在制作天文望远镜时,偶然发现将一个望远镜的物镜放在平板玻璃上,就可以实现光学中常见的定域等厚干涉现象.牛顿环在大学物理实验数据误差处理教学中起着重要作用,更精确的牛顿环估计方法将提高学生对等厚干涉和误差统计分析领域的理解^[1-2].

牛顿环实验基本方法是通过读数显微镜对牛顿环的干涉条纹进行测量,进而计算出平凸镜的曲率半径.为了提高曲率半径的测量精度,人们从各方面进行了详细研究.计算机软件在误差统计分析数值处理中起到了决定性作用^[3].在压力的作用下,平凸镜在接触面附近发生了不可避免的弹性形变,使得暗斑“吞噬”了若干条明暗圆环,因此,实验只能精确测出暗环的直径,却很难确定暗纹的误差确定度.所以,既然误差不可避免,我们将注意力转移到如何构建更准确的统计模型,并进一步得到测量数据的最佳估计值,从而提高计算曲率半径的精度.同时,建立牛顿环测量数据不确定误差参数统计模型对于牛顿环在测量薄膜、玻璃弹性模量、液体折射率等方面应用也具有重要意义.

在过去几十年,高等院校大学物理实验主要使用两种不同的实验方法分析牛顿环实验数据:逐差

法和最小二乘法.逐差法一般采用的方法是把测量的偶数个数据对半分成前后两组,后一组的数据与前一组的对应数据逐差再取平均.最小二乘法是统计学中最常见的回归分析方法.最近十几年,众多物理实验对测量不确定度分析要求越来越高,这对大学物理实验教学研究起到了极大促进作用.然而,不同方法测定的牛顿环平凸透镜的曲率半径有一定的差异,这是多年以来存在于实验教学领域尚需讨论的疑难问题^[4-5].如果实验数据存在特殊的离群点,那就需要选择更稳健的误差统计分析方法.

不同大学物理实验方法测量结果之间的偏差是长期困扰广大师生的难题.为此不同学派的理论学家提出了多种不确定度统计模型解释.对于稳健性统计模型,我们已经基于实验数据集,将MFV统计方法(most frequent value),应用到观测数据最佳估计值问题^[6-7].在我们之前的工作显示,误差分布完全可能是非高斯的,且测量数据之间可能存在无法精确衡量的相关性.

加权平均方法也是一种常见误差处理统计方法.应用加权平均方法要满足一些假设,包括数据在统计意义下独立分布和随机误差满足高斯分布.然而实验测量的误差分布可能是非高斯的,采用加权平均方法不一定能够得到合理的中心估计和不确定度置信区间.中位数方法具有对异常值不敏感特性,已经有很多应用中位数统计处理实验数据集的工作^[8].

* 河北省自然科学基金项目,项目编号: A2017403025, A2021403002.

在非高斯分布情况下,传统方法的应用受到了巨大限制.为详细分析测量过程中的统计误差和系统误差,许多研究人员选取误差参数模型分析物理测量数据.文献[9]在2020年应用贝叶斯分层模型,计算出实验数据的拟合值.文献[10]应用频率学派方法构造了一种具有优良稳健性的模型,该模型对数据误差的建模分析较为全面.

本文将详细分析Cowan的统计方法,以及频率学派不确定误差参数统计模型的构造和计算过程.基于河北地质大学物理实验协会学生测量的牛顿环6~15级实验数据结果,如表1所示,重新构建其不确定误差参数统计模型,以减小异常值的影响.最后给出数值计算拟合结果.

表1 牛顿环实验曲率半径数据结果

逐差法/mm	绝对误差/mm	最小二乘法/mm	绝对误差/mm
1 971.138 2	28.861 8	1 996.670 4	3.329 6
1 991.321 7	8.678 3	1 991.146 7	8.853 3
1 975.750 6	24.249 4	1 992.327 8	7.672 2
1 977.053 7	22.946 3	1 864.384 6	135.615 4
1 900.123 3	99.876 7	1 993.893 0	6.107 0
1 997.248 3	2.751 7	2 006.285 0	6.285 0
1 969.355 3	30.644 7	1 730.218 4	269.781 6
1 975.469 5	24.530 5	1 766.065 5	233.934 5
2 049.005 3	49.005 3	2 048.837 0	48.837 0
2 036.659 4	36.659 4	2 040.307 3	40.307 3
2 101.691 2	101.691 2	2 068.147 2	68.147 2
2 032.364 4	32.364 4	2 034.215 0	34.215 0
2 123.028 5	123.028 5	2 063.713 4	63.713 4
2 026.604 3	26.604 3	2 026.506 7	26.506 7
2 064.540 9	64.540 9	2 005.847 5	5.847 5
2 055.135 8	55.135 8	2 056.843 8	56.843 8
2 014.165 8	14.165 8	2 011.610 4	11.610 4
2 020.092 8	20.092 8	2 014.457 1	14.457 1
2 018.798 2	18.798 2	2 017.623 2	17.623 2
2 072.448 4	72.448 4	2 051.573 7	51.573 7
2 099.545 1	99.545 1	2 077.714 0	77.714 0
2 007.704 4	7.704 4	2 063.713 4	63.713 4
2 082.995 3	82.995 3	2 103.139 7	103.139 7

续表 1

逐差法/mm	绝对误差/mm	最小二乘法/mm	绝对误差/mm
1 532.490 3	467.509 7	1 660.447 2	339.552 8
2 143.191 5	143.191 5	2 144.970 9	144.970 9
2 227.108 0	227.108 0	2 240.111 8	240.111 8
2 235.608 9	235.608 9	2 228.721 8	228.721 8
2 201.391 2	201.391 2	2 198.858 9	198.858 9
2 070.806 7	70.806 7	2 067.836 7	67.836 7
2 040.899 3	40.899 3	2 043.585 3	43.585 3
1 993.884 7	6.115 3	1 994.903 1	5.096 9
2 007.853 3	7.853 3	2 135.552 7	135.552 7
2 112.632 9	112.632 9	2 109.107 2	109.107 2
1 924.260 2	75.739 8	1 927.024 3	72.975 7
1 998.372 3	1.627 7	1 994.598 8	5.401 2
2 021.451 1	21.451 1	2 016.429 2	16.429 2
1 959.814 3	40.185 7	1 989.371 0	10.629 0
1 982.005 1	17.994 9	2 156.533 7	156.533 7
2 112.238 4	112.238 4	2 117.156 7	117.156 7
2 113.076 9	113.076 9	2 115.896 3	115.896 3
2 091.854 6	91.854 6	2 091.690 5	91.690 5
1 974.692 2	25.307 8	1 982.398 1	17.601 9
1 982.839 9	17.160 1	1 983.673 8	16.326 2
2 028.310 1	28.310 1	2 028.063 5	28.063 5
1 979.237 4	20.762 6	1 982.331 9	17.668 1
1 967.841 8	32.158 2	1 966.990 2	33.009 8
2 011.846 1	11.846 1	1 990.038 4	9.961 6
2 001.685 6	1.685 6	2 003.204 1	3.204 1
2 033.464 3	33.464 3	2 022.025 1	22.025 1
1 994.834 2	5.165 8	1 995.106 3	4.893 7
1 930.604 5	69.395 5	1 949.343 4	50.656 6
1 989.971 7	10.028 3	1 993.454 8	6.545 2
1 991.031 6	8.968 4	1 997.028 3	2.971 7

2 频率学派统计方法

2.1 参数估计和置信区间

频率学派参数估计常用方法为极大似然估计和最小二乘法.这两种方法的应用均需满足一定的假设,特别是在应用极大似然估计时,需要预先假设数

据的分布. 通过引入额外的冗余参数,可以降低可能出现的错误先验信息影响,从而提升模型的稳健性,但这可能会使得模型的计算更为复杂.

基于频率学派对概率的定义,频率学派置信区间边界由测量数据的函数给出. 其定义为:覆盖概率指一个集合中包含参数真实值的概率. 构造置信区间使覆盖概率大于给定的置信度. 观测值 Y 的概率密度函数为 $p(y|\theta)$, 其中 θ 是未知参数. 对参数 θ 和置信度 $1 - \alpha$, 有 $y_1(\theta, \alpha)$ 与 $y_2(\theta, \alpha)$, 满足

$$P(y_1 < y < y_2 | \theta) = \int_{y_1}^{y_2} p(y | \theta) dy \geq 1 - \alpha \quad (1)$$

通常 $y_1(\theta, \alpha)$ 与 $y_2(\theta, \alpha)$ 是单射,因此在给定的置信度下,可以求出反函数 $\theta_1(y)$ 和 $\theta_2(y)$. 假设 y_0 与 θ_0 分别为物理量真值和参数真值. 则 θ_0 落在 $[\theta_1, \theta_2]$ 当且仅当 y_0 落在 $[y_1(\theta_0), y_2(\theta_0)]$, 对于所有的 θ_0 值均成立. 因此

$$1 - \alpha = P[y_1(\theta) < y < y_2(\theta)] = P[\theta_2(y) < \theta < \theta_1(y)] \quad (2)$$

这就是置信区间的 Neyman 构造方法. 置信区间构造方法并不唯一,常见选取置信区间方法为:选取中心对称区间、单侧区间,或构造似然比统计量进行检验求解. 另外,若观测值服从离散分布,置信区间的覆盖概率可能大于 $1 - \alpha$.

2.2 似然比统计量的构造和应用

频率学派置信区间的构造方法与假设参数真值为 θ_0 , 并对其进行假设检验是等价的. 常用的一种检验为似然比统计量检验,似然比 λ 定义为

$$\lambda(\theta) = \frac{p(y; \theta)}{p(y; \hat{\theta})} \quad (3)$$

其中 $\hat{\theta}$ 是参数取值范围中令 $f(y; \theta)$ 最大的 θ 值. 观测值 y 与似然函数 $f(y; \theta)$ 确定时, $\lambda(\theta)$ 是 θ 的函数,且 $0 \leq \lambda \leq 1$. 假定 λ 有分布 $g(\lambda)$, 则 θ 的置信区间边界 θ_α 满足

$$\alpha = \int_0^{\lambda(\theta_\alpha)} g(\lambda) d\lambda \quad (4)$$

置信区间的数值计算有时会很困难,可以通过蒙特卡罗 (MC) 方法求解. 如果模型中使用似然函数较为复杂,那么运算过程中将包含较多难算的最优化问题.

2.3 不确定误差参数统计模型

对于构造似然比时引入冗余参数, Cowan 提出

一种应用轮廓似然比 (profile likelihood ratio) 统计量的不确定误差参数统计模型. 此模型对数据误差应用 Gamma 分布进行建模,通过调整超参数 r , 得到具有优良稳健性的拟合结果. 轮廓似然比定义为

$$\lambda(\theta) = \frac{L(\mu, \hat{\theta})}{L(\hat{\mu}, \hat{\theta})} \quad (5)$$

其中 μ, θ 代表待求参数和冗余参数. $L(\mu, \theta)$ 为似然函数, $\hat{\mu}, \hat{\theta}$ 代表使得 $L(\mu, \theta)$ 达到全局最大时的 μ, θ 取值, $\hat{\theta}$ 代表确定 μ 值,使得 $L(\mu, \theta)$ 达到最大值时的 θ 取值.

Wilks 定理证明了在大样本、数据独立分布的条件下, $-2\ln \lambda$ 服从自由度为 $N - M$ 的卡方分布,其中 N 为数据量, M 为模型中参数个数. 只要确定 $\hat{\theta}$, $-2\ln \lambda$ 作为 μ 的函数从最小值增加 n^2 (n 为自由度) 时对应的 μ 值即为其 68.3% 置信区间的边界. 在求出似然函数后,可计算似然比统计量,从而应用上述定理求出目标物理量的拟合值和置信区间.

图 1 展示了正态分布样本的轮廓似然直方图与 χ^2 分布的对比. 红色直线代表标准的 χ^2 分布 PDF, 样本轮廓似然比的 MC 模拟结果在归一化后显示为蓝色直方图. 在满足一定假设的前提下, $-2\ln \lambda$ 服从 χ^2 分布. 然而若某些假设条件不成立,比如参数间有着相关性的条件下, $-2\ln \lambda$ 则并不总是服从 χ^2 分布.

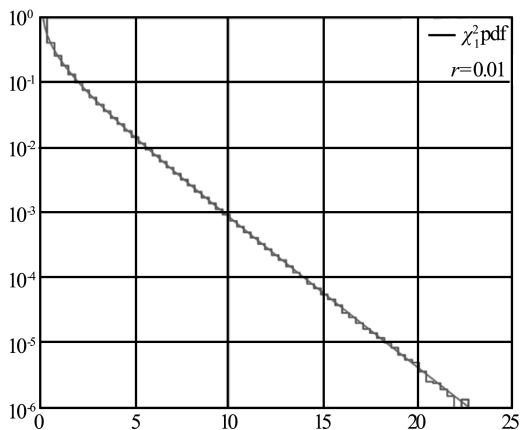


图 1 特定参数下 $-2\ln \lambda$ 的分布

对于牛顿环实验数据统计分析问题,可以选取高斯分布的似然函数,而对误差应用 Gamma 分布模型进行刻画. 通过超参数控制误差波动,可以在实验数据集上得到较好的拟合效果. 高斯分布通常被认

为是在许多未知影响因素相互叠加时的近似分布,这里为 $p(y|\mu, \theta)$ 选取高斯分布的似然函数是合理的. 可以构造如下似然函数

$$L(\mu, \theta, \sigma_u^2) = p(y|\mu, \theta) \cdot \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{u_i}} e^{-\frac{(u_i - \theta)^2}{2\sigma_{u_i}^2}} \frac{\beta_i^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i)} v_i^{\alpha_i-1} e^{-\beta_i v_i} \quad (6)$$

这代表假设观测数据 y 服从一个高斯分布,其参数为 μ, θ . θ 的估计值为 u , 假设其服从高斯分布,即

$$u_i \sim N(\bar{u}, \sigma_{u_i}^2) \quad (7)$$

在满足一定条件的前提下,参数 $\sigma_{u_i}^2$ 的估计值 v_i 是一组从 Gamma 分布随机抽取的控制变量, α, β 为其参数. Gamma 分布的概率密度函数为

$$p(v; \alpha; \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} v^{\alpha-1} e^{-\beta v} \quad v \geq 0 \quad (8)$$

Gamma 分布均值和方差满足 $E[v] = \frac{\alpha}{\beta}, V[v] = \frac{\alpha}{\beta^2}$.

在模型中,待求参数为 μ , 其余参数为对数据误差进行统计建模的冗余参数. 定义

$$r_i = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{v_i}}{E[v_i]} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{v_i}}{\sigma_{u_i}^2} \quad (9)$$

则在模型中,可以将 r 与 $\alpha, \beta, \sigma_{u_i}^2$ 联系起来,只用参数 r 来控制 Gamma 分布的形式,即

$$\alpha_i = \frac{1}{4r_i^2} \quad (10)$$

$$\beta_i = \frac{1}{4r_i^2 \sigma_{u_i}^2} \quad (11)$$

调整超参数 r 的值,可以控制模型对于异常值的敏感性.

在对模型参数进行化简后,对数似然函数为

$$-2\ln L = \sum \frac{(y_i - \mu - \theta_i)^2}{\sigma_{y_i}^2} + \sum \left(1 + \frac{1}{2r_i^2}\right) \ln \left[1 + 2r_i^2 \frac{(u_i - \theta_i^2)}{v_i}\right] \quad (12)$$

可以通过求解最优化问题: $\min_{\mu, \theta} -2\ln L$ 得到所有参

数值,即 $\hat{\mu}, \hat{\theta}$. 对在合理区间内每个固定的 μ 值求解 $\hat{\theta}$, 计算出对应的轮廓似然比统计量 $\lambda(\theta)$. 轮廓对数似然比可以表示成 μ 的函数,其服从卡方分布. $-2\ln L$ 从最大值减少一个固定值时对应 μ 值区间边界通常称为 MINOS 置信区间. 参数 r 值较小时,两者吻合较好;随着参数值扩大, $-2\ln L$ 的分布与标

准 χ^2 分布吻合不佳,且模型的不确定度进一步扩大,这意味着过大的 r 值可能使得模型失效. MINOS 置信区间的计算过程需要求解大量有约束的最优化问题,对参数 μ 的每个不同取值,均需要最优化冗余参数使得负对数似然最小. 我们使用 Python 中 Scipy 包求解,这样可在较短时间内得到精度符合预期的结果.

图 2 展示了误差模型在一组测试数据上的拟合效果. 牛顿环测试数据理论值为 $\hat{y} = 2000$, 而本文中数据具有标准差 $\sigma = 100$. 因此,为测试数据选取统计误差 $\sigma_{y_i} = 100$ 和系统误差 $\sigma_{u_i} = 100$. 右图 2 右侧加入一个数据中的异常值,其均值为 $\hat{y} = 1532.4903$. 不同参数设置下的拟合值及置信区间显示为水平直线和阴影,在 r 值非常小的情况下,模型表现出的稳健性不佳. 选取合适的 r 值,可以使拟合结果更加接近数据的真实分布. 总体来看,在适当的参数设置下,此模型在测试数据上表现优秀,且对异常值的敏感性较低.

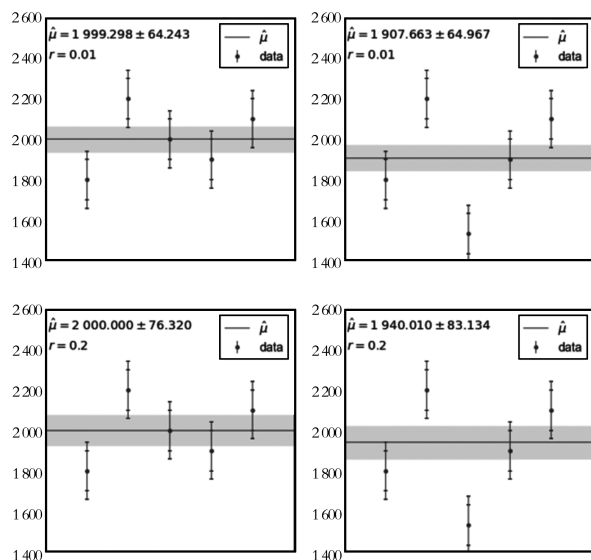


图 2 模型在一组实验数据上的拟合结果

3 模型计算结果

计算所得的牛顿环测量数据估计值及其置信区间如图 3 所示. 图中曲线代表负对数似然作为参数 μ 的函数,根据 Wilks 定理,使得 $-2\ln \lambda$ 从最小值增大 1 时的 μ 值即为其 68.3% 置信区间的边界,在图中以竖直虚线显示. 不同的子图显示了不同参数设置下的拟合结果. 计算得到,选取 $r = 0.2$ 时,牛顿环测量数据估计值为 $R = 1998.79$, 对应的置信区间边

界为 $[1\ 990.34, 2\ 007.32]$. 当 $r = 0.4$ 时的置信区间总长略大于 $r = 0.2$ 时的结果,这与之前的模型分析吻合.

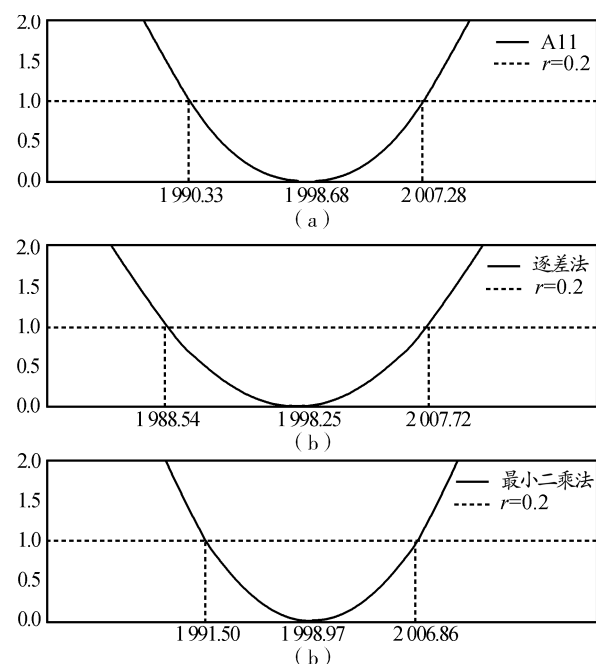


图3 模型计算结果

此外,模型对采用逐差法的数据拟合结果为 $R = 1\ 998.25 - 9.71 / + 9.47$,对最小二乘法的数据结果为 $R = 1\ 998.97 - 7.47 / + 7.90$. 在计算过程中,当 $r = 0.6$ 时, $-2\ln \lambda$ 的函数曲线有更多的起伏,这表示当 r 过大,模型的预测效果可信度较低. 因此,我们选取参数值 $r = 0.2$ 作为最优参数值.

图4对比了牛顿环实验测量数据和不同统计模型计算结果,图中阴影部分为不确定误差参数模型计算所得的置信区间. 在垂直虚线左侧为随牛顿环实验变化的测量数据列,右侧为模型拟合结果,包括加权均值、中位数以及本文得到的结果. 图4下方子图展示了以误差统计模型为基准进行归一化之后的结果.

此误差统计模型的重要特性之一是,随着参数值的增加,拟合数据的值对显著偏离中心值的游离点(异常值)变得不那么敏感. 图4中体现出了这种特性,结合在实验数据上的拟合效果,最终我们选取参数值 $r = 0.2$. 此时的不确定误差参数统计模型相比起中位数结果更接近于数据整体的加权均值,且对数据有着较好的覆盖率.

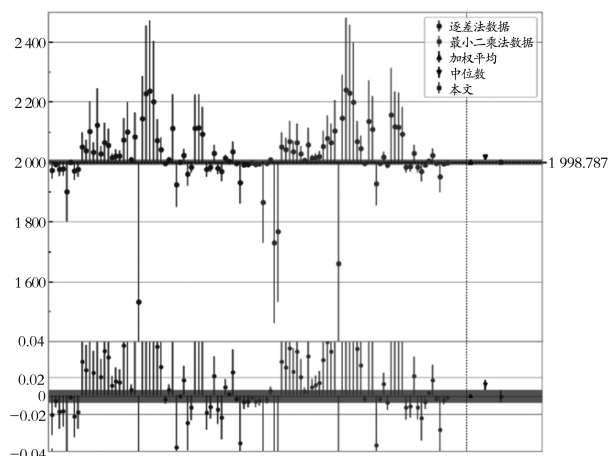


图4 原始数据分布及模型预测结果对比

(下方子图为归一化后的相对误差分布)

4 结论

总而言之,物理实验的一个主要目标是对一些关键物理量进行精确测量. 牛顿环实验数据不同方法间长期存在的偏差是基础光学和大学物理实验数据处理的疑难问题之一. 对牛顿环测量误差进行稳健统计建模分析是获取可信估计值及置信区间的关键. 本文应用Cowan不确定误差参数统计模型,对牛顿环实验数据使用Gamma分布对误差建模,得到曲率半径估计值为 $R = 1\ 998.79 - 8.45 / + 8.53$,计算结果显示出良好的稳健性,并且对异常值的干扰不敏感.

George E. P. Box指出:“所有模型都是错误的,但有些模型是有用的”. 每个计算统计模型的一些潜在假设并不一定都严格成立. Gamma误差模型在一定程度上可以克服传统方法不实假设的问题,这也启发我们在类似情况下应用不确定误差参数模型,并进一步研究其他大学物理实验测量数据的不确定度问题.

参考文献

- [1] 叶紫,马文姣,孟子硕,等. 牛顿环实验中一些问题的探讨[J]. 大学物理实验,2022,35(1):50-52.
- [2] 周勇,顾佳鹏,李金玉. 牛顿环中心圆斑大小对测量结果影响的研究[J]. 大学物理实验,2017,30(3):125-127.
- [3] 徐少刚,夏雪琴,Matlab软件在牛顿环实验数据处理方法上的创新[J]. 大学物理实验,2014,27(5):97-99.
- [4] 郭有能,田清龙,曾可. 关于牛顿环教学探讨[J]. 教育教学论坛,2020(22):301-302.

(下转第106页)

学实验中应尊重实验数据,实事求是,绝不能为使数据迎合主观预期而篡改数据,弄虚作假,培养在尊重实验结果的基础上,根据实验数据分析、反思和改进实验方案的能力。

3 结束语

在学习物理规律的过程中,学生往往只被动地接受知识,而无法感悟到科学家在发现规律的过程中,所经历的艰辛和富有创造性的研究智慧,无法体会到物理学的规律之美。本文利用传感器设计探究性实验,希望学生在学习知识的同时,感悟到科学探究的艰辛,以及物理规律的来之不易,从而提高学生的物理学科核心素养,以期能为探究物理规律的实验设计提供一定的新思路。

传感器能采集各种物理数据,具有便携、实时、准确、综合、直观、定量等突出的特点^[4]。在实验教学中,可利用传感器进行定量测量,获取原始数据。

(上接第100页)

- [5] 厉桂华, 赵文丽, 丛晓燕, 等. 不同测量位置对牛顿环仪曲率半径大小的影响探究[J]. 大学物理实验, 2022, 35(1): 53-55.
- [6] ZHANG J. Most frequent value statistics and distribution of 7Li abundance observations [J]. *MNRAS*, 2017, 468(4): 50145019.
- [7] ZHANG J. Most frequent value statistics and the hubble

通过关注量的变化,使学生掌握分析数据的方法,发现数据背后的物理原理,深化学生对物理规律的理解。在整个探究过程中,要发挥好教师的主导地位,确保学生的主体地位,让每个学生都能在潜移默化中接受到科技创新的教育,在亲身经历中提高分析问题的能力,让学生真切地感受到物理,享受物理学习的乐趣。

参考文献

- [1] 卞志荣. 利用传感器实验培养学生设计能力和探究能力[J]. 物理教学探讨, 2004(2): 47-49.
- [2] 人民教育出版社, 课程教材研究所, 物理课程教材研究开发中心. 普通高中课程教科书物理必修第二册[M]. 北京: 人民教育出版社, 2019: 10.
- [3] 赵露, 王林. 探究平抛运动规律的实验设计[J]. 中国教育技术装备, 2016(21): 143-145.
- [4] 刘宝玉, 高金怡. 利用 DIS 传感器 优化物理课堂教学[J]. 中国科教创新导刊, 2013(27): 94-95.
- constant[J]. *PASP*, 2018, 130(990): 084502.
- [8] RAJAN A, DESAI S. A meta analysis of neutron lifetime measurements[J]. *PTEP*, 2020, 2020(1): 013C01.
- [9] ERLER J, Ferro Hernández R. Alternative to the application of pdg scale factors [J]. *EPJ C*, 2020, 80(6): 19.
- [10] COWAN G. Statistical models with uncertain error parameters[J]. *EPJ C*, 2019, 79.

Statistical Analysis on Uncertain Error Parameters of Newton Ring Measurement Data

ZHANG Sen ZHANG Jiang CAO Nanbin

(School of Mathematics and Science, Hebei GEO University, Shijiazhuang, Hebei 050031)

Abstract: The data analysis of Newton's ring experiment is an important issue in university physics. Using different statistical methods, the measurements to radius of Newton's ring have been obtained, which are inconsistent. Furthermore, the measurement errors may not follow the Gauss distribution. In order to estimate the real radius of Newton's ring, more detailed modeling and analysis of data errors are considered. The frequentist model applied a Gamma distribution to analyze systematic errors, with the advantage of nonsensitive to outliers. Based on the measurement datasets of Newton's rings, we can obtain more accurate estimate to the radius of Newton's ring by applying the uncertainty error parameters statistical model.

Key words: Newton's rings; error analysis; central estimation; confidence intervals