小虫爬绳与宇宙膨胀*

——浅谈如何培养中学生的科学思维和提升创新能力

陈彦希 李 惠
（株洲市第二中学 湖南 株洲 412000）

（收稿日期:2023-01-31）

摘 要:探究小虫爬绳与宇宙膨胀两个物理学模型之间的联系,通过提取信息、建构模型、迁移运用等步骤,引领学生从运用模型解决一个问题到解决一类问题.

关键词:核心素养;宇宙膨胀;科学思维;创新能力

“小虫爬弹性绳”是经典动力学模型,宇宙膨胀是天文学和物理学研究的内容,两个看似毫不相关的内容,竟然可以用同一种物理方法解决.而寻找这种联系的过程对提升中学生创新能力和培养中学生的科学思维很有助益.

1 小虫爬绳

1.1 习题模型

【习题】长为 L 的均匀弹性绳 AB 自由伸直地放在光滑水平桌面上,绳的 A 端固定,$t=0$ 时,一小虫开始从 A 端出发以相对其足下绳段的匀速度 u 在绳上朝 B 端爬去,同时绳的 B 端以相对桌面的匀速度 v 沿绳长方向运动,试求小虫爬到 B 端的时刻 t_e.

1.2 两种解法

（1）常规解法一

在原长的绳上以 A 为原点建立沿 AB 方向的 x 坐标轴,设 t 时刻小虫处于 x 位置,此时绳的真实长度已经变成 $L+vt$,在真实长度的绳上建立 x' 坐标轴,则绳中 x 坐标对应的 x' 坐标为

$$x'=\frac{L+vt}{L}x \tag{1}$$

考虑 $\mathrm{d}t$ 时间,易得

$$\mathrm{d}x=\frac{L}{L+vt}\mathrm{d}x'=\frac{L}{L+vt}u\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

积分
$$\int_0^L \mathrm{d}x=\int_0^{t_e}\frac{L}{L+vt}u\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

即得
$$t_e=\frac{L}{v}(\mathrm{e}^{\frac{v}{u}}-1) \tag{4}$$

（2）创新解法二

使用一种等效处理方法,如图 1(a) 所示,将长为 L 的 AB 绳弯曲成相接圆环绳,半径为

$$r_0=\frac{L}{2\pi} \tag{5}$$

t 时刻因为 B 的运动绳长增为 $L+vt$,对应圆半径为

$$r=\frac{L+vt}{2\pi} \tag{6}$$

此过程中,小虫随 B 沿绳长方向的运动转化为小虫的径向朝外运动,小虫爬绳运动转化为沿圆周切向的运动[图 1(b)].小虫从 $\theta=0$ 爬到 $\theta=2\pi$,即到达 B 端.

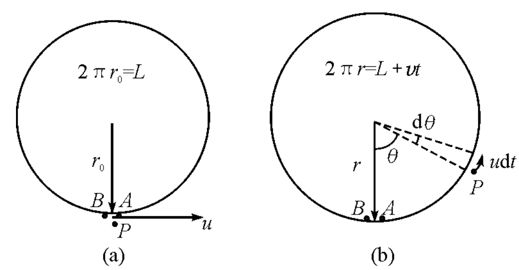

图 1 创新解法二图

参考图 1(b) 中参量,有

$$\mathrm{d}\theta=\frac{u\mathrm{d}t}{r}=\frac{2\pi u}{L+vt}\mathrm{d}t \tag{7}$$

积分
$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=\int_0^{t_e}\frac{2\pi u}{L+vt}\mathrm{d}t \tag{8}$$

即得
$$t_e=\frac{L}{v}(\mathrm{e}^{\frac{v}{u}}-1) \tag{9}$$

* 2022 年湖南省教育学会“十四五”教育科研课题“高中物理竞赛中创新人才培养模式的探索”阶段性研究成果,课题编号:B-91.

2　知识迁移——宇宙膨胀模型

2.1　提出问题

【例1】(第11届亚洲奥林匹克竞赛理论题)宇宙各处通过光子传递信息.当我们从光子中获取信息时,必须考虑宇宙正在膨胀这一事实的影响.因此,通常用与时间有关的尺度因子 $a(t)$ 表示长度或距离的膨胀效果,于是相对各自局域参考系静止的两颗恒星之间的距离 $L(t)$ 正比于 $a(t)$,即

$$L(t)=ka(t)$$

其中 k 为常数,$a(t)$ 描述了宇宙的膨胀效应.将上式两边对时间求导,可得

$$\frac{\mathrm{d}L(t)}{\mathrm{d}t}=k\frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t}}{a(t)}L(t)$$

最终得到

$$v(t)=H(t)L(t)$$

该式称为哈勃定律,$H(t)=\dfrac{\frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t}}{a(t)}$ 称为 t 时刻的哈勃常数.在目前时刻 t_0,哈勃常数为

$$H(t_0)=72\ \mathrm{km/(s\cdot Mpc)}$$

$$1\ \mathrm{Mpc}=3.085\,7\times10^{19}\ \mathrm{km}=3.261\,6\times10^{6}\ \mathrm{ly}$$

假设宇宙无穷大,而且以 $a(t)\propto\mathrm{e}^{bt}$ 的方式持续膨胀,其中 b 为常数.在此宇宙模型中,哈勃常数是与时间无关的常数 $H(t_0)$.光子在宇宙中行进时波长 λ 也因宇宙的膨胀而等比例变长,即 $\lambda(t)\propto a(t)$.

假设氢原子特征谱线之一的莱曼-α线是由相对局域参考系静止的恒星 S 在 t_e 时刻发出的,发出时的波长为 $\lambda(t_e)=121.5$ nm,当莱曼-α线在 t_0 时刻到达相对局域参考系静止的地球时,地球上的观察者测得到达地球的莱曼-α线波长为145.8 nm,忽略地球的自转和公转.莱曼-α线的光子向我们行进时,宇宙一直在膨胀中,使得恒星 S 持续远离我们.已知真空中的光速 c 一直维持不变,求 t_e 时刻恒星 S 与地球之间的距离 $L(t_e)$ 的值,以Mpc为单位.

2.2　建模解决问题

常规解法[1]在此不再赘述,笔者提供另一种更简单更有趣味性地解答方法.根据题目描述,宇宙膨胀类似于弹性绳的伸长,只是描述其伸长速度的函数不同;而光子在膨胀的宇宙中运动时,其在局域参考系中速度恒为 c,这一点极类似于小虫相对其足下绳段速度不变.所以我们很自然地联想到将宇宙膨胀等效处理成“小虫爬绳”.

将恒星 S 与地球看作一条“弹性绳”的两端,并将其首尾相接成一个圆环,则其半径为

$$r=\frac{L(t)}{2\pi}\tag{10}$$

将光子看作“小虫”,其在“绳”上运动的角速度为

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{c}{r}=\frac{2\pi c}{L(t)}\tag{11}$$

利用题目给出的关系 $L(t)=ka(t)$,$a(t)\propto\mathrm{e}^{bt}$,可知 $L(t)\propto\mathrm{e}^{bt}$.设 $L(t)=k'\mathrm{e}^{bt}$,代入整理并积分得

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=\int_{t_e}^{t_0}\frac{2\pi c}{k'}\mathrm{e}^{-bt}\,\mathrm{d}t\tag{12}$$

即

$$2\pi=\frac{2\pi c}{k'}\frac{1}{-b}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{bt_0}}-\frac{1}{\mathrm{e}^{bt_e}}\right)\tag{13}$$

又由 $\lambda(t)\propto a(t)$,得

$$\frac{\mathrm{e}^{bt_0}}{\mathrm{e}^{bt_e}}=\frac{a(t_0)}{a(t_e)}=\frac{\lambda(t_0)}{\lambda(t_e)}=\frac{145.8\ \mathrm{nm}}{121.5\ \mathrm{nm}}=\frac{6}{5}\tag{14}$$

所以代入并整理得

$$L(t_e)=k'\mathrm{e}^{bt_e}=\frac{c}{6b}\tag{15}$$

代入数值得

$$L(t_e)=690\ \mathrm{Mpc}\tag{16}$$

3　结束语

小虫之小,宇宙之大,表象万千,可却遵从相同的物理规律,通过以上对物理内涵规律的挖掘,让人沉醉于物理学的逻辑之美,感叹大自然的神妙;整个思维过程就是一个创新的过程,在这个过程中,学生是知识的主动建构者,教师是学生学习的帮助者、合作者[2],多做类似这样的逻辑思维训练能很好地培养中学生的科学思维.

参考文献

[1] 陈怡,杨军伟.亚洲物理奥林匹克竞赛理论试题与解析[M].合肥:中国科学技术大学出版社,2021:139-154.

[2] 陆丁龙.问题化教学设计:催生核心素养的有效生长[J].物理教师,2022(11):32-35.