对高脚酒杯杯脚贴画在杯底球面成像通式的探究与拓展

郑通和

（宁夏育才中学　宁夏 银川　750021）

（收稿日期：2023－03－02）

摘　要：在近轴光线条件下，根据光路成像的几何关系，探究高脚酒杯杯底球面在凸、凹两种情况下，规定凸球面半径 R 为正、凹球面半径 R 为负的符号法则，便推导出通过物到球心的距离计算像到球面顶点距离的成像通式．并通过高斯公式验证，证明了高脚酒杯杯脚贴画在杯底球面成像通式的正确性．

关键词：物理竞赛；球面成像；通式推导；拓展

【原题】（第 21 届全国中学生物理竞赛预赛第 6 题）有一种高脚酒杯，如图 1 所示．杯内底面为一凸起的球面，球心在顶点 O 下方玻璃中的 C 点．球面的半径 $R=1.5$ cm．O 到杯口平面的距离为 8.0 cm，在杯脚底中心处 P 点紧贴一张画片，P 点距 O 点 6.3 cm，这种酒杯未斟酒时，若在杯口处向杯底方向观看，将看不出画片上的景物．但如果斟酒，再在杯口处向杯底方向观看，将看到画片上的景物．已知玻璃的折射率 $n_1=1.56$，酒的折射率 $n_2=1.34$．试通过分析计算与论证解释这一现象．

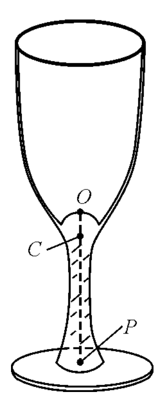

图 1　高脚酒杯

1　高脚酒杯杯底是凸、凹球面成像的通式推导

1.1　杯底是凸球面的通式推导[1]

如图 2 所示，把高脚酒杯放平（杯脚靠左杯口靠右），分析成像问题．

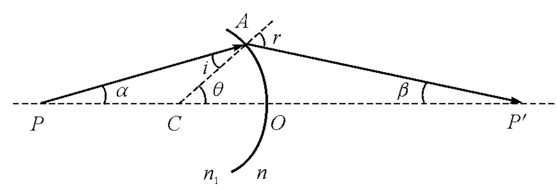

图 2　杯底是凸球面近轴光线成像光路

未斟酒时，杯底凸球面的两侧介质折射率分别为 n_1 和 $n=n_0=1$，由于 $n<n_1$，则 $r>i$．并对画片 P 所成像点 P' 的位置 $\overline{OP'}$ 进行通式推导．

在 $\triangle PAC$ 中，由正弦定理有

$$\frac{R}{\sin\alpha}=\frac{\overline{PC}}{\sin i} \tag{1}$$

考虑近轴光线成像：α 、i 都是小角度，可近似认为

$$\sin\alpha\approx\alpha \qquad \sin i\approx i$$

则有

$$\alpha=\frac{R}{\overline{PC}}i \tag{2}$$

和角度几何关系

$$\theta=i+\alpha \tag{3}$$

得

$$\theta=\left(1+\frac{R}{\overline{PC}}\right)i \tag{4}$$

在 $\triangle CAP'$ 中，由正弦定理有

作者简介：郑通和（1968－　），男，本科，中教高级，主要从事中学物理教学及研究工作．

$$\frac{R}{\sin\beta}=\frac{\overline{CP'}}{\sin r} \tag{5}$$

同样考虑近轴光线成像：β、r 都是小角度，可近似认为

$$\sin\beta\approx\beta \qquad \sin r\approx r$$

和角度几何关系式

$$r=\theta+\beta \tag{6}$$

得

$$\overline{CP'}=\frac{r}{r-\theta}R \tag{7}$$

在光路折射中，由折射定律

$$\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{n}{n_1}$$

则
$$r\frac{n_1}{n}=i \tag{8}$$

根据光路成像的距离几何关系，联立式(4)、(7)、(8)得

$$\overline{OP'}=\overline{CP'}-R=\frac{r}{r-\theta}R-R=$$

$$\frac{\theta}{r-\theta}R=\frac{\left(1+\frac{R}{\overline{PC}}\right)R}{\frac{n_1}{n}-1-\frac{R}{\overline{PC}}}$$

即得到一种高脚酒杯杯底是凸球面时杯脚底画片成像通式为

$$\overline{OP'}=\frac{\left(1+\frac{R}{\overline{PC}}\right)R}{\frac{n_1}{n}-1-\frac{R}{\overline{PC}}}=\frac{\overline{PC}+R}{\left(\frac{n_1}{n}-1\right)\frac{\overline{PC}}{R}-1}$$

1.2　杯底是凹球面的通式推导

因高脚酒杯杯底球面有凸、凹、平 3 种情况．竞赛中在将高脚酒杯底拓展为凹球面的情况下，$\overline{OP'}$ 通式推导如下：如图 3 所示做模似成像光路设 $n>n_1$，则 $r<i$．

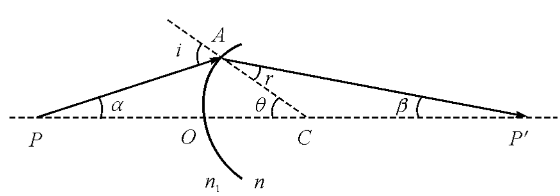

图 3　杯底是凹球面近轴光线成像光路

在 $\triangle PAC$ 中，由正弦定理有

$$\frac{R}{\sin\alpha}=\frac{\overline{PC}}{\sin(\pi-i)}=\frac{\overline{PC}}{\sin i} \tag{9}$$

考虑近轴光线成像：α，i 都是小角度，可近似的认为

$$\sin\alpha\approx\alpha \qquad \sin i\approx i$$

得

$$\alpha=\frac{R}{\overline{PC}}i \tag{10}$$

由角度几何关系得

$$\theta=i-\alpha=\left(1-\frac{R}{\overline{PC}}\right)i \tag{11}$$

在 $\triangle CAP'$ 中，由正弦定理有

$$\frac{R}{\sin\beta}=\frac{\overline{CP'}}{\sin r} \tag{12}$$

和角度几何关系

$$r=\theta-\beta \tag{13}$$

同样考虑近轴光线成像：β、r 都是小角度，可近似的认为

$$\sin\beta\approx\beta \qquad \sin r\approx r$$

所以

$$\overline{CP'}=\frac{r}{\theta-r}R \tag{14}$$

由光路折射定律

$$\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{n}{n_1}$$

则
$$r=\frac{n_1}{n}i \tag{15}$$

根据光路成像的距离几何关系，联立式(11)、(14)、(15)得

$$\overline{OP'}=\overline{CP'}+R=\frac{r}{\theta-r}R+R=$$

$$\frac{\theta}{\theta-r}R=\frac{\left(1-\frac{R}{\overline{PC}}\right)R}{\left(1-\frac{n_1}{n}\right)-\frac{R}{\overline{PC}}}$$

则得到高脚酒杯杯底是凹球面时杯脚底画片成像通式为

$$\overline{OP'}=\frac{\left(1-\frac{R}{\overline{PC}}\right)R}{\left(1-\frac{n_1}{n}\right)-\frac{R}{\overline{PC}}}=\frac{\overline{PC}-R}{\left(1-\frac{n_1}{n}\right)\frac{\overline{PC}}{R}-1}$$

综上所述，高脚酒杯杯底有凸、凹两种球面(杯底是平面的不做讨论)，像 P' 到球面顶点 O 的距离 $\overline{OP'}$ 的通式，仅区别于杯底球面半径 R 的正负．杯底是凸球面，则通式中球面半径 R 为正；杯底是凹球面，则通式中球面半径 R 为负．

2　杯脚贴画在杯底是凸球面的成像位置

2.1　未斟酒时(图 2)

$n=n_0=1$,由通式得

$$\overline{OP'}=\frac{\overline{PC}+R}{\left(\frac{n_1}{n}-1\right)\frac{\overline{PC}}{R}-1}=\frac{2.68\,\overline{PC}+4}{\overline{PC}-2.68}$$

关于像点 P' 的位置与高脚酒杯脚高低(即 $\overline{PC}$ 值)的关系,分以下几种情况讨论:

(1) 当 $\overline{PC}=0$,即画片 P 位于球心 C 时,由通式得 $\overline{OP'}=-1.5$ cm,说明画片 P 成一虚像 P' 在凸球面顶点 O 的左侧 1.5 cm 处和球心 C 重合(图 4).

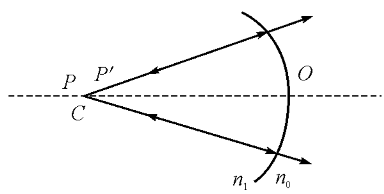

图 4　杯底是凸球面近轴光线物象同点成像光路

高斯公式验证:$\frac{n'}{s'}-\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{R}$ 及符号法则[2].

式中

$$s=\overline{PO}=-1.5\text{ cm}\qquad R=-1.5\text{ cm}$$
$$n'=n_0=1\qquad n=n_1=1.56$$

解得
$$\overline{OP'}=s'=-1.5\text{ cm}$$

证明和通式结论相一致.

(2) 因为 $\overline{OP'}$ 通式的分母不能等于 0,则 $\overline{PC}\neq 2.68$ cm. 当 $\overline{PC}=2.68$ cm 时,则 $\overline{OP'}\propto\infty$,说明画片 P 发出的光线经球面折射后平行于主光轴,则画片 P 即不能成实像,也不能成虚像(图 5).

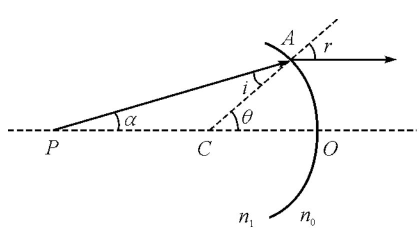

图 5　杯底是凸球面近轴光线不成像光路

高斯公式验证:$\frac{n'}{s'}-\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{R}$ 及符号法则.

式中

$$s=\overline{PO}=-(2.68+1.5)\text{ cm}=-4.18\text{ cm}$$
$$R=-1.5\text{ cm}\qquad n'=n_0=1\qquad n=n_1=1.56$$

解得

$$\overline{OP'}=s'\propto\infty$$

证明和通式结论相一致.

(3) 当 $\overline{OP'}>0$ 时,即画片 P 成一实像 P' 在凸球面顶点 O 的右侧. 由通式

$$\overline{OP'}=\frac{2.68\,\overline{PC}+4}{\overline{PC}-2.68}$$

即 $\overline{PC}>2.68$ cm. 此类情况恰属原题所给条件:已知 $\overline{PC}=\overline{PO}-\overline{CO}=4.8\text{ cm}>2.68\text{ cm}$,由通式解得 $\overline{OP'}=7.95$ cm,则画片上景物 P 所成实像在杯口距凸球面顶点 O 的 7.95 cm 处,而已知杯口距 O 点的高度为 8 cm,说明人眼的位置距 O 点 7.95 cm 之外,由于 P' 是实像,是光线的会聚点,但光线决不在会聚点停止,它们相交后仍然继续沿原来的直线传播,人眼可看到画片 P 的实像 P'(图 6).

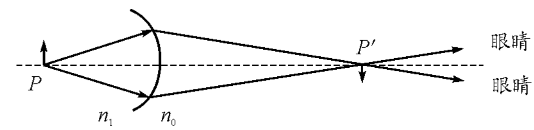

图 6　实像 P' 通过眼睛在视网膜上二次成像光路

通过通式及作图证明了"这种酒杯未斟酒时,若在杯口处向杯底方向观看,能看到画片 P 上的景物". 并不是原题中所说的"将看不到画片上的景物".

高斯公式验证:$\frac{n'}{s'}-\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{R}$ 及符号法则.

式中

$$s=\overline{PO}=-6.3\text{ cm}\qquad R=-1.5\text{ cm}$$
$$n'=n_0=1\qquad n=n_1=1.56$$

解得
$$\overline{OP'}=s'=7.95\text{ cm}$$

证明和通式结论相一致.

(4) 当 $\overline{OP'}<0$ 时,由通式

$$\overline{OP'}=\frac{2.68\,\overline{PC}+4}{\overline{PC}-2.68}<0$$

得
$$\overline{PC}<2.68\text{ cm}$$

且画片 P 在球心 C 的左侧时,假设 $\overline{PC}=2.0$ cm 时,由通式可求得 $\overline{OP'}=-13.8$ cm,则画片 P 成一虚像 P' 位于凸球面顶点 O 的左侧,以确定像 P' 的位置,并可在杯口向杯底观看,见到像位变深的虚像 P'(图 7).

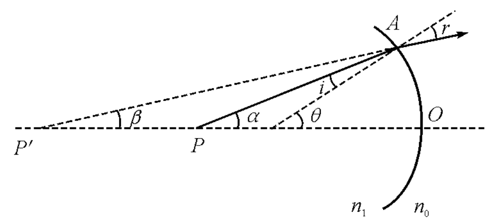

图 7　杯底是凸球面近轴光线成像变深光路

高斯公式验证：$\frac{n'}{s'}-\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{R}$ 及符号法则.假设$\overline{PC}=2.0\ \text{cm}<2.68\ \text{cm}$，式中

$$s=\overline{PO}=-3.5\ \text{cm}\qquad R=-1.5\ \text{cm}$$
$$n'=n_0=1\qquad n=n_1=1.56$$

解得
$$\overline{OP'}=s'=-13.8\ \text{cm}$$

证明和通式结论相一致.

(5) 当$\overline{PC}<1.5$ cm，画片 P 在球心 C 的右侧，此时$\overline{PC}$ 改变符号，由通式得

$$\overline{OP'}=\frac{2.68\ \overline{PC}-4}{\overline{PC}+2.68}$$

假设$\overline{PC}=1.0$ cm，由通式求得

$$\overline{OP'}=-0.36\ \text{cm}$$

可确定虚像 P' 的位置，并可在杯口向杯底观看，见到像位变浅的 P'(图 8).

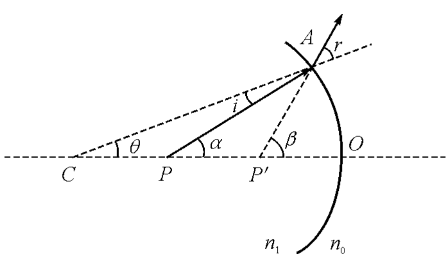

图 8　杯底是凸球面近轴光线成像变浅光路

高斯公式验证：$\frac{n'}{s'}-\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{R}$ 及符号法则.假设$\overline{PC}=1.0\ \text{cm}<1.5\ \text{cm}$，式中

$$s=\overline{PO}=-0.5\ \text{cm}\qquad R=-1.5\ \text{cm}$$
$$n'=n_0=1\qquad n=n_1=1.56$$

解得
$$\overline{OP'}=s'=-0.36\ \text{cm}$$

证明和通式结论相一致.

2.2　斟满酒后

当酒的折射率 $n=n_2=1.34$ 时，通式应为

$$\overline{OP'}=\frac{\overline{PC}+R}{\left(\frac{n_1}{n}-1\right)\frac{\overline{PC}}{R}-1}=\frac{9.14\ \overline{PC}+13.7}{\overline{PC}-9.14}$$

关于像点 P' 的位置与高脚酒杯杯脚高低(即$\overline{PC}$ 值)的关系，分以下几种情况讨论：

(1) 当$\overline{PC}=0$，即画片 P 位于球心 C 时，由通式得$\overline{OP'}=-1.5$ cm，说明画片 P 成一虚像 P' 在凸球面顶点 O 的左侧 1.5 cm 处和球心 C 重合(类似于图 4).

高斯公式验证：$\frac{n'}{s'}-\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{R}$ 及符号法则.式中

$$s=\overline{PO}=-1.5\ \text{cm}\qquad R=-1.5\ \text{cm}$$
$$n'=n_2=1.34\qquad n=n_1=1.56$$

解得
$$\overline{OP'}=s'=-1.5\ \text{cm}$$

证明和通式结论相一致.

(2) 当$\overline{OP'}>0$ 时，则由$\overline{OP'}$ 的通式得：$\overline{PC}>9.14$ cm，画片 P 成一实像 P' 在凸球面顶点 O 的右侧.原题中$\overline{PC}=\overline{PO}-\overline{CO}=4.8\ \text{cm}<9.14\ \text{cm}$，不属此类，说明斟酒后画片 P 不会成一实像 P' 在杯口附近.

(3) 当$\overline{OP'}<0$ 时，由通式

$$\overline{OP'}=\frac{9.14\ \overline{PC}+13.7}{\overline{PC}-9.14}<0$$

可知$\overline{PC}<9.14$ cm，原题中在杯脚底中心处 P 点紧贴一张画片，P 点距O 点 6.3 cm，$\overline{PC}=\overline{PO}-\overline{CO}=4.8\ \text{cm}<9.14\ \text{cm}$，恰属此类，且画片 P 在球心C 的左侧时，画片 P 成一虚像 P' 位于凸球面顶点 O 的左侧.将原题中已知条件：$\overline{PC}=4.8$ cm 代入通式得：$\overline{OP'}=-13.27$ cm.说明画片 P 成P' 像在O 点左侧 13.27 cm 处，由于 P' 和 P 同侧，则 P' 为一虚像，可在杯口处向杯底方向观看，将看到像位变深的景物(图 9).

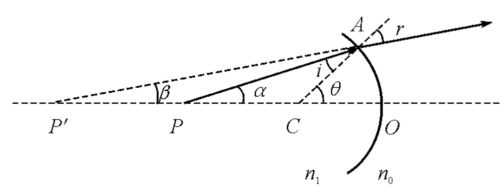

图 9　杯底是凸球面近轴光线成像变深光路

高斯公式验证：$\frac{n'}{s'}-\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{R}$ 及符号法则.式中

$$s=\overline{PO}=-6.3\ \text{cm}\qquad R=-1.5\ \text{cm}$$
$$n'=n_2=1.34\qquad n=n_1=1.56$$

解得
$$\overline{OP'}=s'=-13.27\ \text{cm}$$

证明和通式结论相一致.

根据光在球面或不同介质面逐个成像法[3] 可知，该像相对高脚酒杯中酒面可再次成像.

由高斯公式：$\frac{n'}{s'}-\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{R}$ 及符号法则.式中

$$s=\overline{PO}=-(13.27+8)\text{cm}=-21.27\ \text{cm}$$

酒平面的曲率半径 $R\propto\infty$，$n'=n_2=1.34$，$n=n_1=1.56$.

解得 $\overline{OP'}=s'=-15.87\ \text{cm}$

所成虚像在球面顶点 O 左侧 15.87 cm 处.

(4) 由 $\overline{PC}<9.14\ \text{cm}$ 时，同时 $\overline{PC}<1.5\ \text{cm}$，画片 P 在球心 C 的右侧，$\overline{PC}$ 改变符号，由通式得

$$\overline{OP'}=\frac{9.14\,\overline{PC}-13.7}{\overline{PC}+9.14}$$

当已知 $\overline{PC}$ 时，由通式求得 $\overline{OP'}$ 的值，以确定虚像 P' 的位置，并可在杯口向杯底观看，见到像位变浅的景物(类似于图 8).

(5) 当酒的折射率 $n<1.34$ 时，见 $\overline{OP'}$ 的通式，由原题中已知条件：$\overline{PC}=4.8\ \text{cm}$ 代入通式可得

$$\overline{OP'}=\frac{1.5}{\dfrac{1.19}{n}-1}$$

当 $\dfrac{1.19}{n}>1$ 时，要使画片 P 仍可成一实像 P' 在 O 的右侧，即 $\overline{OP'}>0$，则 $n<1.19$，说明若斟入的酒的折射率 $n_2<1.19$ 时，同样画片 P 仍可成一实像 P' 在 O 的右侧，即杯口附近. 这是命题者在给出已知条件通常"酒的折射率 $n_2=1.34$"之外的因素.

3 杯脚贴画在杯底是凹球面的成像位置

如图 3 所示，当 $n=n_0=1$，由通式

$$\overline{OP'}=\frac{\overline{PC}-R}{\left(1-\dfrac{n_1}{n}\right)\dfrac{\overline{PC}}{R}-1}=-\frac{2.68\,\overline{PC}-4}{\overline{PC}+2.68}$$

可知，当画片 P 距凹球面球心的距离

$$\overline{PC}=\overline{PO}+\overline{CO}>1.5\ \text{cm}$$

所以 $\overline{OP'}<0$. 说明画片 P 成一虚像 P' 总是在凹球面顶点 O 的左侧处.

3.1 未斟酒时

如图 10 所示，$n=n_0=1$，$R=1.5\ \text{cm}$.

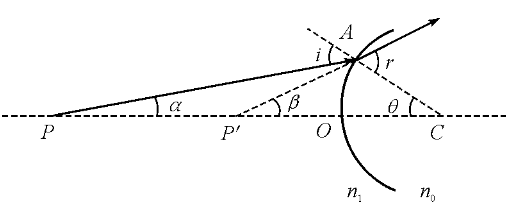

图 10 杯底是凹球面近轴光线成像变浅光路

原题条件在杯脚底中心处 P 点紧贴一张画片，P 点距 O 点 6.3 cm，$\overline{PC}=\overline{PO}+\overline{CO}=7.8\ \text{cm}$，由通式

$$\overline{OP'}=\frac{\overline{PC}-R}{\left(1-\dfrac{n_1}{n}\right)\dfrac{\overline{PC}}{R}-1}=-\frac{2.68\,\overline{PC}-4}{\overline{PC}+2.68}$$

得 $\overline{OP'}=-1.61\ \text{cm}$

说明画片 P 成一虚像 P' 在凹球面顶点 O 的左侧 1.61 cm 处.

高斯公式验证：$\dfrac{n'}{s'}-\dfrac{n}{s}=\dfrac{n'-n}{R}$ 及符号法则.

式中

$$s=\overline{PO}=-6.3\ \text{cm}\qquad R=1.5\ \text{cm}$$

$$n'=n_0=1\qquad n=n_1=1.56$$

解得 $\overline{OP'}=s'=-1.61\ \text{cm}$

证明和通式结论相一致.

3.2 斟满酒后

类图见图 10，$n=n_2=1.34$，式中 $\overline{PC}=\overline{PO}+R=7.8\ \text{cm}$，由通式

$$\overline{OP'}=\frac{\overline{PC}-R}{\left(1-\dfrac{n_1}{n}\right)\dfrac{\overline{PC}}{R}-1}=-\frac{9.38\,\overline{PC}-14}{\overline{PC}+9.38}$$

代入通式可得凹球面高脚酒杯成像 $\overline{OP'}=-3.4\ \text{cm}$，即所成像在球面顶点 O 的左侧 3.4 cm 处.

高斯公式验证

$$\frac{n'}{s'}-\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{R}\qquad s=\overline{PO}=-6.3\ \text{cm}$$

$$R=1.5\ \text{cm}\qquad n'=n_2=1.34\qquad n=n_1=1.56$$

解得 $\overline{OP'}=s'=-3.4\ \text{cm}$

证明和通式结论相一致.

4 总结

在近轴光线成像的条件下，通过对高脚酒杯杯底球面凸、凹(平底未做讨论)两种情况成像规律的探究，推论出关于画片的位置 P 到球心 C 的距离 $\overline{PC}$，在未斟酒与斟满酒两种情况下，对像 P' 位置 $\overline{OP'}$ 距离的决定关系，得到 $\overline{OP'}$ 的通式. 为求解近轴光线条件下，高脚酒杯杯脚画片在杯底球面的成像距离提供了另一种解题方法.

参 考 文 献

[1] 郑通和. 对一道全国中学生物理竞赛预赛题的通式探究[J]. 物理教师，2007(8)：63-64.

[2] 姚启钧. 光学教程[M]. 北京：高等教育出版社，1989：177-179.

[3] 姚启钧. 光学教程[M]. 北京：高等教育出版社，1989：182.