

# 类比法剖析毛细现象的能量分配\*

芮云军 类淑国

(南京工业大学数理科学学院 江苏 南京 211816)

邰传智

(南京市溧水区教师发展中心 江苏 南京 211200)

(收稿日期:2023-03-03)

**摘要:**毛细现象的能量来源曾经有过激烈的讨论,但能量分配并未解释清楚.将毛细管中液柱上升运动与盘曲链条升降运动进行类比,通过受力及做功分析,明确了毛细现象中能量的分配问题,即毛细恒力做功与液柱重力势能变化、动能损失、滞阻损失之间的关系,并进行了实验验证.

**关键词:**毛细现象;盘曲链条;恒力做功;重力势能;动能损失;滞阻损失

毛细现象是浸润和表面张力共同引起的<sup>[1-3]</sup>.就能量观点而言,液体浸润管壁现象的发生,是由于势能较高的液体内部分子不断地进入势能较低的附着层中所致,根据稳定平衡时势能最小原理<sup>[2]</sup>,得到液柱的平衡位置高度为

$$h_0 = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g r} \quad (1)$$

其中 $\rho$ 为液体的密度, $r$ 为毛细管的内半径, $\theta$ 为接触角, $g$ 为重力加速度, $\sigma$ 则为液体的表面张力系数.这与教材中从流体静力学出发,利用各点压强关系推出的高度完全一致<sup>[1]</sup>.

既然平衡位置的高度为 $h_0$ ,那液柱所能达到的最大高度是多少呢?文献[2]指出,“若系统无摩擦阻力,则液柱将在 $h_0$ 附近做简谐振动,最大高度可达 $2h_0$ ”.为了解该命题,我们将液柱上升运动与盘曲链条升降运动进行类比,计算系统中各力做功与动能变化,分析毛细现象中的能量分配问题<sup>[4]</sup>.该类比有助于学生对毛细力的理解,以及变质量系统运动和能量损失的理解.

## 1 毛细力与链条恒力的类比

当毛细管插入液体,在毛细力的作用下,管中液面升高.在三相界面处,由著名的 Young 方程

表示<sup>[3,5]</sup>

$$\sigma_{SV} - \sigma_{SL} = \sigma_{LV} \cos \theta \quad (2)$$

其中 $\sigma_{SV}$ 、 $\sigma_{SL}$ 、 $\sigma_{LV}$ 分别表示固气、固液、液气两相间的表面张力系数,如图1所示.

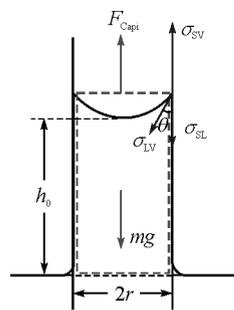


图1 毛细力分析

该理论指出,接触角 $\theta$ 完全取决于3个两相间的表面张力系数,与液柱重力无关<sup>[5]</sup>.将液柱作为研究对象(如图1中虚线框所示),其所受外力可以表示为

$$F_{\text{Capi}} = 2\pi r(\sigma_{SV} - \sigma_{SL}) = 2\pi r \sigma_{LV} \cos \theta \quad (3)$$

可见,液柱所受毛细力 $F_{\text{Capi}}$ 取决于毛细管半径 $r$ ,液气两相间的表面张力系数 $\sigma_{LV}$ 和接触角 $\theta$ .

公式(3)表明,液柱上升过程中, $F_{\text{Capi}}$ 为恒力,方向沿着管壁向上.水柱的相邻质量元之间有分子吸引力,类似于细绳,链条内的张应力.所以,液柱在

\* 国家自然科学基金项目,项目编号:61704079.

作者简介:芮云军(1977-),男,博士,副教授,主要从事大学物理相关专业课的教学工作.

毛细力下的上升运动与盘曲链条受恒力  $F_{\text{Chain}}$  的运动很相似,都可以作为一维变质量系统进行研究.液柱的线密度可以表示为

$$\lambda_L = \rho\pi r^2 \quad (4)$$

## 2 毛细运动与链条运动的能量分配类比

毛细现象发生时,毛细力大于液柱重力,即

$$F_{\text{Capi}} > \lambda_L gh \quad (h < h_0)$$

此时液柱具有加速度,具有速度  $v$  和动能  $E_k$ .随着液柱高度的增加,当

$$F_{\text{Capi}} = \lambda_L gh_0$$

液柱到达其平衡位置  $h_0$ .若系统无能量损失,液柱将继续升高,并在毛细管中围绕平衡位置  $h_0$  作简谐振动.然而事实并非如此,因为变质量系统(液柱)的质量元之间有动能损失  $\Delta E_k > 0$  和粘滞阻力损耗(滞阻损失)  $f > 0$ .

图2为不同的液面高度来源的3种能量分配假设.

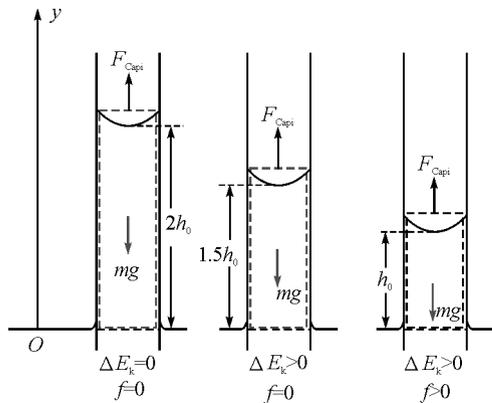


图2 毛细力作用下的液柱高度与能量分配关系

液面上升过程中,没有任何能量损失( $\Delta E_k = 0, f = 0$ )时,液面高度可达  $2h_0$ ;有动能损失,但无滞阻损失( $\Delta E_k > 0, f = 0$ )时,液面高度为  $1.5h_0$ ;而同时有动能和滞阻损失( $\Delta E_k > 0, f > 0$ )时,液面高度则为  $h_0$ .作为类比,盘曲链条受竖直向上恒力  $F_{\text{Chain}}$  作用,提拉端也会有3种不同的高度,即  $2a_0, 1.5a_0, a_0$ ,如图3所示.

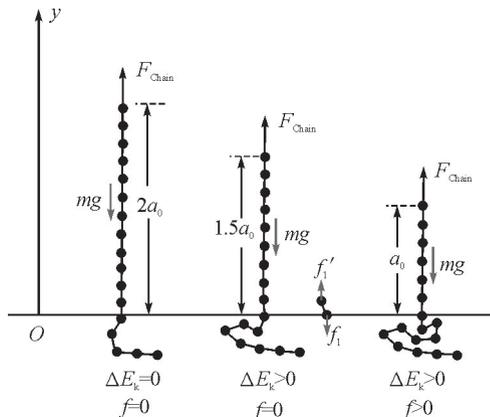


图3 恒力提拉下的链条高度与能量分配关系

动能损失和滞阻损失可表示为

$$\Delta E_k = \int_0^y \frac{1}{2} \lambda dy \cdot v^2 \quad (5)$$

$$W_f = \int_0^h f dy \quad (6)$$

恒力做功和重力势能增加分别表示为

$$W_C = F_C y \quad (7)$$

$$\Delta E_p = \int_0^h \lambda y g dy \quad (8)$$

其中  $F_C$  表示恒力,根据公式(5)~(8),表1中给出了毛细恒力  $F_{\text{Capi}}$  或链条恒力  $F_{\text{Chain}}$  做功、重力势能变化、动能损失以及滞阻损失的值,它们之间的相互关系如图4所示.

表1 毛细上升与链条提拉中的能量分配值

恒定外力		高度 $y$	恒力做功 / ( $\times k$ ) 公式(7)	重力势能增加 / ( $\times k$ ) 公式(8)	内能增加 $\Delta E_i / (\times k)$		能量系数 $k$
					动能损失 公式(5)	滞阻损失 公式(6)	
毛细上升	$F_{\text{Capi}} = 2\pi r \sigma_{LV} \cos \theta$	$2h_0$	2	2	0	0	$\frac{4\pi\sigma_{LV}^2 \cos^2 \theta}{\rho g}$
		$1.5h_0$	1.5	$1.5 \cdot \frac{3}{4}$	$1.5 \cdot \frac{1}{4}$	0	
		$h_0$	1	0.5	0.5		
链条提拉	$F_{\text{Chain}} = \lambda g a_0$	$2a_0$	2	2	0	0	$\lambda g a_0^2$
		$1.5a_0$	1.5	1.125	0.375	0	
		$a_0$	1	0.5	0.5		

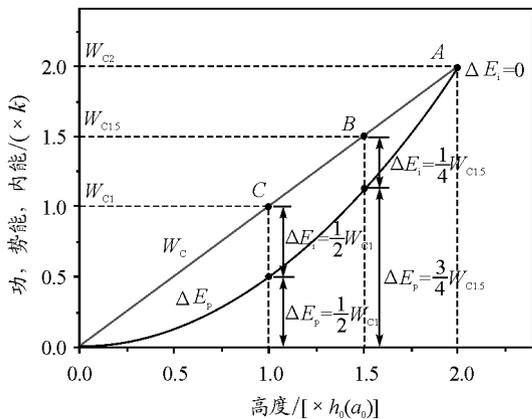


图4 毛细上升(链条提拉)中的高度与能量关系

## 2.1 无能量损失 ( $\Delta E_k = 0, f = 0$ )

假设液面上升过程中,没有任何能量损失.则毛细力做功将完全转化为液柱重力势能  $\Delta E_p$  的增加

$$F_{\text{Capi}} y = \int_0^h \lambda_L y g dy \quad (9)$$

得到

$$y = \frac{2F_{\text{Capi}}}{\lambda_L g} = \frac{4\sigma_{LV} \cos \theta}{\rho g r} = 2h_0 \quad (10)$$

此时

$$W_{\text{Capi}} = \Delta E_p = \frac{8\pi\sigma_{LV}^2 \cos^2 \theta}{\rho g} = 2k$$

$k$  定义为能量系数,表示液柱上升到平衡位置  $h_0$  处,毛细力所做的功,即

$$W_{\text{Capi}(h=h_0)} = k = \frac{4\pi\sigma_{LV}^2 \cos^2 \theta}{\rho g}$$

将毛细力替换为链条恒力  $F_{\text{Chain}}$ ,液柱线密度替换为链条线密度  $\lambda$ .由公式(9)、(10)可得,盘曲链条上升到平衡位置  $a_0$  时,恒力做功为

$$W_{\text{Chain}(a=a_0)} = k = \lambda g a_0^2$$

升高  $2a_0$  时做功为

$$W_{\text{Chain}} = \Delta E_p = 2\lambda g a_0^2$$

如表1和图4中的A点所示.

## 2.2 仅有动能损失 ( $\Delta E_k > 0, f = 0$ )

假设变质量系统质量元之间仅仅发生非弹性碰撞,动能损失不可避免.又假设液柱与毛细管壁没有摩擦阻力,以液柱为研究对象,其动力学方程可以表示为<sup>[6-8]</sup>

$$F_{\text{Capi}} - \lambda_L y g - f_1 = \lambda_L y \frac{dv}{dt} \quad (11)$$

其中  $f_1 = \lambda_L v^2$  为已动部分与未动部分的冲力,正是动能损失的内力,可通过动量定理得到<sup>[8]</sup>.

求解方程(11),得到液柱上升过程中的速度可以表示为

$$v^2 = \frac{F_{\text{Capi}}}{\lambda_L} - \frac{2}{3} g y \quad (12)$$

所以,当液柱为最高点时,  $v = 0$ , 此时液柱的最大高度为

$$y = \frac{3F_{\text{Capi}}}{2\lambda_L g} = \frac{3\sigma_{LV} \cos \theta}{\rho g r} = 1.5h_0$$

继续求解该变质量系统到达最高点 ( $1.5h_0$ ) 之后的动力学方程,发现液柱将在平衡位置  $h_0$  附近,作准周期的阻尼振动.

此时

$$W_{\text{Capi}} = \frac{6\pi\sigma_{LV}^2 \cos^2 \theta}{\rho g} = 1.5k$$

将公式(12)中的  $v^2$  带入公式(5)计算动能损失

$$\Delta E_k = \frac{1.5\pi\sigma_{LV}^2 \cos^2 \theta}{\rho g}$$

而重力势能增加

$$\Delta E_p = \frac{4.5\pi\sigma_{LV}^2 \cos^2 \theta}{\rho g}$$

两者分别为毛细力做功的  $\frac{1}{4}$  与  $\frac{3}{4}$ . 同理,对于盘曲链条,恒力  $F_{\text{Chain}}$  做功、动能损失和重力势能增加也有相同的能量分配比例,如表1和图4中的B点所示.

## 2.3 同时存在动能损失和滞阻损失 ( $\Delta E_k > 0, f > 0$ )

根据公式(5)~(8)定义,毛细现象的动力来源于毛细力  $F_{\text{Capi}}$  做功,一部分提高液柱重力势能  $\Delta E_p$ , 一部分增加系统内能  $\Delta E_i$ . 很显然,系统内能为液面上升过程中的动能损失  $\Delta E_k$  和滞阻损失  $W_f$  之和.

$$\Delta E_i = \Delta E_k + \Delta E_f = W_{\text{Capi}} - \Delta E_p \quad (13)$$

根据理论分析可知,同时存在动能损失和滞阻损失时,液面上升高度介于  $1.5h_0$  与  $h_0$  之间.当滞阻损失特别大时,液柱的运动可认为是过阻尼振动,毛细上升最大高度为其平衡位置.公式(13)对于盘曲链条也适用.有趣的是,此时液柱上升或链条升降过

程的内能变化是恒力做功的一半,另一半为重力势能增量,如表1和图4中的C点所示,即

$$\Delta E_i = \Delta E_k + \Delta E_f = \frac{1}{2} W_C = \Delta E_p \quad (14)$$

### 3 实验验证

公式(5)、(6)中,动能损失和滞阻损失的具体计算是十分不易的.公式(14)同样告诉我们, $\Delta E_k$ 、 $W_f$ 为互补关系.为了展示这种相反的变化趋势,我们采用链条与鱼漂组成变质量运动系统,鱼漂可以提供向上的恒力 $F_{\text{chain}}$ (大小不变的浮力).链条上下运动具有动能损失,在水中运动也会有很大的滞阻损失.实验中,鱼漂的平衡位置为 $a_0 = 59.5 \text{ cm}$ ,将鱼漂从 $1.5a_0$ 处静止释放(在水中)<sup>[8]</sup>.手机拍摄其运动轨迹视频,Tracker软件提取高度.

根据之前的分析,链条将做振幅逐渐减小的准周期振动.图5中的曲线1表示“仅仅考虑动能损失”情况下的数值模拟图像.作为比较,曲线2为实际测量的运动图像.

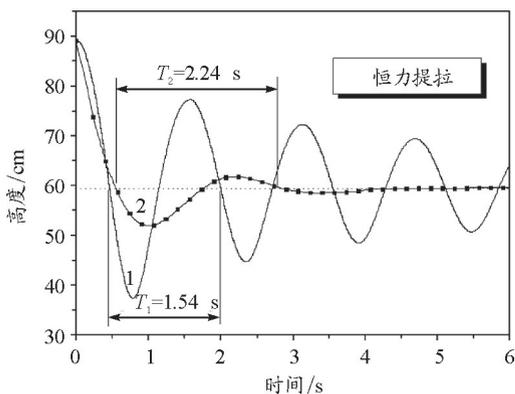


图5 鱼漂受恒定浮力的理论(1)与实际(2)振动图像

很显然,实际情况下,链条运动同时存在动能损失和滞阻损失,所以振幅减小,周期增加.由理论值的 $T_1 = 1.54 \text{ s}$ 增加到实验值的 $T_2 = 2.24 \text{ s}$ .并且这种振幅与周期的变化,随着有机玻璃透明圆柱筒(装水容器)内径 $D$ 的改变而变化,原因是链条运动中的粘滞阻力大小会变化<sup>[9]</sup>.其表达式为

$$f = \eta \Delta S \frac{dv}{dx} \quad (15)$$

其中 $\Delta S$ 表示鱼漂侧面积, $\frac{dv}{dx}$ 为流体的速度梯度.实

验发现,随着圆柱筒内径 $D$ 逐渐减小,鱼漂与筒壁距离 $x$ 减小,流体的速度梯度将增大.由公式(15)可知,链条受到的粘滞阻力就变大,链条速度减小,链条的振幅将逐渐减小,周期变大,如图6中2,3,4,5曲线所示(斜率表示速度).说明粘滞阻力确实对系统的运动产生了重要的影响.

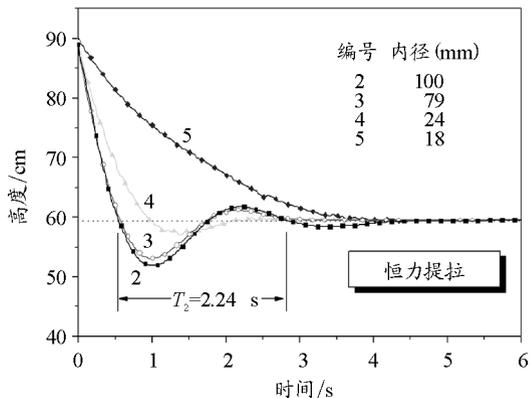


图6 不同粘滞阻力下的鱼漂振动图像比较

就能量而言,随着粘滞阻力增加,其所做功 $W_f$ 增加.由图6中曲线斜率,随着粘滞阻力增加,速度减小,即 $\Delta E_k$ 将减小.此时变质量系统(水中链条)的运动状态将由(仅仅只有动能损失的)准周期振动(图5中曲线1)变为欠阻尼振动(图6中曲线2,3,4),最后到过阻尼振动(图6中曲线5).最终链条静止在平衡位置,重力势能增加为 $\Delta E_p = \frac{1}{2} \lambda g a_0^2$ ,恒力(浮力)做功为 $W_{\text{chain}} = \lambda g a_0^2$ .即可以证明公式(14)的互补关系.

$\Delta E_k$ 和 $W_f$ 之间的互补关系,也可以通过毛细管液面的不同上升速度来进行验证,如图7所示.

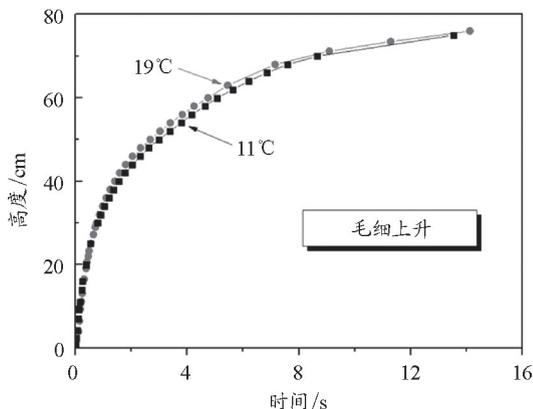


图7 不同粘滞阻力下的液柱上升速度比较

从图7中可以看到,11℃时毛细管中水面上升速度比19℃时的速度小,所以到达最大高度 $h_0$ 所需要的时间增加了.查表可知,两温度下的粘滞系数 $\eta$ 差别很大,分别为 $1.2713 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ (11℃),和 $1.0299 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ (19℃).所以11℃时,水的粘滞阻力 $f$ 较大,相应的阻力做功 $W_f$ 也增加.导致其动能损失 $\Delta E_k$ 减小,所以液面上升速度,在低温条件下减小了,如图7中的斜率所示.但是两温度下,表面张力系数差别很小,实验测得的液柱上升高度

均为78 mm,所以 $W_{\text{Capi}} = \frac{4\pi\sigma_{\text{LV}}^2 \cos^2\theta}{\rho g}$ 相同, $\Delta E_p =$

$\frac{2\pi\sigma_{\text{LV}}^2 \cos^2\theta}{\rho g}$ 相同.也可以证明动能损失和滞阻损失

的互补关系,即 $\Delta E_k + \Delta E_f = \frac{1}{2}W_{\text{Capi}} = \Delta E_p$ .

#### 4 总结

将毛细力看做恒定外力,毛细管中的液柱看做一维变质量系统,构建了一维变质量系统受恒力作用的物理模型,与盘曲链条受力和运动相类似.通过3种能量假设,对毛细现象的能量来源和分配进行了分析.通过具体实验,验证了理论分析的正确性,

加深了学生对毛细力做功、重力势能变化、动能损失、滞阻损失的概念及相互之间关系的理解.

#### 参考文献

- [1] 刘爱国. 毛细现象的能量来源[J]. 大学物理,1994,13(12):9-10.
- [2] 严子俊. 关于“毛细现象的能量来源”的讨论[J]. 大学物理,1996,15(10):31-32.
- [3] 周向玲. 浸润及毛细现象的能量来源[J]. 河南师范大学学报(自然科学版),2001,29(3):118-119.
- [4] 刘云飞,周曼. 毛细现象中的能量转化[J]. 物理通报,1997,17(2):6-7.
- [5] PERE Roura. Contact angle in thick capillaries:a derivation based on energy balance[J]. *Eur. J. Phys.*,2007(28):L27-L32.
- [6] 金烈侯. 变质量物体运动动能损失的分析[J]. 物理教师,1998,19(9):47-48.
- [7] 邵云. 应用质点系的动量定理求解柔软链条的运动[J]. 大学物理,2022,41(7):13-18.
- [8] 芮云军,类淑国,邵传智. 盘曲链条升降运动分析[J]. 物理通报,2023,42(5):147-152.
- [9] 罗友仁,闫秀莲,王杰. 在气轨上测定空气粘滞系数[J]. 物理实验,1997,17(6):247-248.

## Analogical Analysis on the Energy Distribution of Capillarity

RUI Yunjun LEI Shuguo

(College of Physical and Mathematical Sciences,Nanjing Tech University,Nanjing,Jiangsu 211816)

TAI Chuanzhi

(Nanjing Lishui District Teacher Development Center,Nanjing,Jiangsu 211200)

**Abstract:** The energy source of capillarity has been deeply discussed, but the energy distribution has not been explained clearly. Based on the analogy between the rise of liquid level in the capillary and the up and down movement of the piled chain, the energy distribution, the relationship between the work done by capillary constant force and the gravitational potential energy, kinetic energy loss and viscous resistance loss of liquid column, was clarified by theoretical analysis, and verified by experiments.

**Key words:** capillarity; piled chain; constant force work; gravitational potential energy; kinetic energy loss; viscous resistance loss