



殊途同归 妙理常在感悟中

——论一题多解在教学中的应用

魏平军

(石家庄市第一中学 河北 石家庄 050000)

(收稿日期:2023-04-11)

摘要:利用“一题多解”“多解归一”“一题多问”“一题多变”“多题归一”等方法可以提升学生的总结归纳能力,加深对知识的理解.

关键词:归纳;多解;归一;本质

1 问题的提出

如何在教学中进一步提升学生的总结归纳能力?适当的时候进行“一题多解”“多解归一”“一题多问”“一题多变”“多题归一”等方法是很好的解决方案.

“一题多解”是指同一道题目用不同的方法均可以得到正确答案,可以是基于不同物理规律运用的一题多解,可以是基于不同研究角度的一题多解,可以是基于不同数学手段的一题多解,可以是基于不同思维方法运用的一题多解.“一题多解”是思维发散的过程.

“多解归一”是将不同的解法进行比较,寻求其共同点,去抓住不同方法背后最核心的本质规律,是思维收敛的过程.

“一题多问”是在同一个背景下对这个题目进行追问,从多个角度去理解和考查某一物理模型或过程.

“一题多变”是将题目解完之后,更改题目中的条件,拓宽对题目的理解.

“多题归一”是指将以往与此题相类似的题目进行对比归纳,寻求不同题目相同的解决方案,是在更高的视角上去审视此题.

2 教学实践

下面以高一一次阶段性测试题的压轴题讲评为例说明以上方法的应用.

【题目】如图 1 所示,某工厂输送物件的传送系

统由倾角为 30° 的传送带 AB 和一倾角相同的长木板 CD 组成,物件和传送带间的动摩擦因数 $\mu_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$,与木板的动摩擦因数 $\mu_2=\frac{\sqrt{3}}{15}$.传送带以 $v_0=4\text{ m/s}$ 的恒定速度顺时针转动.现将物件 P 无初速置于传送带 A 点,发现当物件到达 B 端时刚好相对传送带静止,到达 D 点时速度恰好为零随即被机械手取走.物件可以看成质点,皮带与木板间可认为无缝连接,重力加速度 $g=10\text{ m/s}^2$.求:

- (1) 传送带的长度 L_1 ;
- (2) 木板的长度 L_2 以及物件从 A 到 D 所需的时间 T ;
- (3) 假如机械手未能在 D 点及时将物件取走,导致物件重新下滑,则此后它第二次向上返回木板时离 C 点的最大距离.

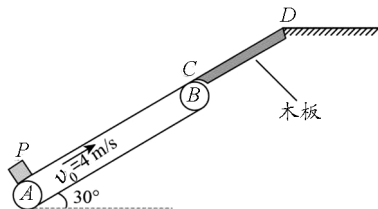


图 1 题目示意图

说明:考虑到高一学生对于通项归纳掌握得还不是很好,在第(3)问设置时将初稿中的“第四次”改为“第二次”以降低难度,在讲评时就可以就通项归纳再做进一步补充.

解答:(1)、(2) 略.第(3)问笔者准备了两种解法,分别从动力学角度和能量角度进行求解.

2.1 “一题多解”

解法 1:动力学角度

从 D 点向下运动,受力分析如图 2 所示.

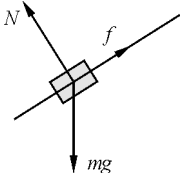


图 2 解法 1 受力分析图

由牛顿第二定律有

$$mg \sin \theta - \mu_2 mg \cos \theta = ma_1$$

过 C 点时速度为 v_1 ,有

$$v_1^2 = 2a_1 L_2$$

设过 C 点后向下滑行 L' 后物件速度减为零,下滑过程中加速度大小为 a_2 ,则有

$$\mu_1 mg \cos \theta - mg \sin \theta = ma_2$$

$$v_1^2 = 2a_2 L'$$

再次返回 C 点时加速度大小为 a'_2 ,则

$$\mu_1 mg \cos \theta - mg \sin \theta = ma'_2$$

可得 $a'_2 = a_2$,所以返回 C 点时速度大小仍为 v_1 .

设物件滑过 C 点后向上运动 x_1 后停止,向上减速过程中加速度大小为 a_3 ,则

$$mg \sin \theta + \mu_2 mg \cos \theta = ma_3$$

$$v_1^2 = 2a_3 x_1$$

解得

$$x_1 = \frac{2}{3} L_2$$

同理得第二次上滑过 C 后还能再上滑

$$x_2 = \frac{2}{3} x_1$$

即

$$x_2 = \frac{16}{27} \text{ m}$$

解法 2:能量角度

设第一次下滑经过 C 点再下滑 L' 后速度减为零,下滑过程由动能定理得

$$mgL_2 \sin \theta - \mu_2 mgL_2 \cos \theta +$$

$$mgL' \sin \theta - \mu_1 mgL' \cos \theta = 0$$

设第一次上滑过 C 点后还能再上滑 x_1 ,上滑过程由动能定理得

$$\mu_1 mgL' \cos \theta - mgL' \sin \theta -$$

$$\mu_2 mgx_1 \cos \theta - mgx_1 \sin \theta = 0$$

解得

$$x_1 = \frac{2}{3} L_2$$

同理得第二次上滑过 C 后还能再上滑

$$x_2 = \frac{2}{3} x_1$$

即

$$x_2 = \frac{16}{27} \text{ m}$$

解法 3:学生甲补充的

学生甲:我们可以判断物件下滑过 C 点后减速至零再返回 C 点的过程中加速度大小和方向都没有变化,所以再返回 C 点时速度大小不变,于是可以“略去”过 C 点后的下滑过程,可以直接对从 D 点下滑至第一次到上滑返回木板最高点的过程进行分析.

由动能定理得

$$mg(L_2 - x_1) \sin \theta - \mu_2 mg(L_2 + x_1) \cos \theta = 0$$

得

$$x_1 = \frac{2}{3} L_2$$

同理 $x_2 = \frac{2}{3} x_1$,即 $x_2 = \frac{16}{27} \text{ m}$.

解法 4:学生乙补充的

学生乙:受学生甲的启发,直接对从 D 点下滑至第一次到上滑返回木板最高点的过程进行分析,不用分析加速度因素,直接由动能定理,也可列出

$$mg(L_2 - x_1) \sin \theta - \mu_2 mg(L_2 + x_1) \cos \theta = 0$$

因为物件下滑过 C 点后减速至零再返回 C 点的过程中重力不做功,滑动摩擦力一次负功一次正功可以抵消,这一段滑动摩擦力做功为零,与学生甲的思路相比,可以不用分析加速度的因素,思路更简洁.

解法 5:学生丙补充的

学生丙:物件无论第几次从传送带加速上滑过 C 点后在木板上减速至零的过程中,物件的受力情况没有发生任何变化,于是加速和减速的距离的比值一定相同.比值为

$$k = L_1 : L_2 = 12 : 5$$

所以由

$$mgL_2 \sin \theta - \mu_2 mgL_2 \cos \theta +$$

$$mgL' \sin \theta - \mu_1 mgL' \cos \theta = 0$$

解得 L' 后得

$$L' : x_1 = 12 : 5$$

可得

$$x_1 = \frac{8}{9} \text{ m}$$

同理,可解得第二次下滑距离 L'' ,即 $L'' : x_2 = 12 : 5$,可解得

$$x_2 = \frac{16}{27} \text{ m}$$

解法 6:学生丁补充的

学生丁:受学生甲的启发,传送带上的过程可以“略去”,于是只分析物件在木板上的下滑和上滑过程,容易求得下滑和上滑加速度比值为

$$a_1 : a_2 = 2 : 3$$

由 $v^2 = 2ax$ 可得

$$L_2 : x_1 = 3 : 2$$

同理 $x_1 : x_2 = 3 : 2$,即

$$x_2 = L_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{16}{27} \text{ m}$$

2.2 “多解归一”

对以上解答对比分析可得,解法 1 和解法 6 均是从动力学角度分析,但解法 6 的思路更简洁,将中间“无效”过程“略去”,快速得到正确答案.

解法 2 和解法 4 均是从能量角度处理,但解法 4 所研究的过程更“宏观”,没有分上下段处理,更好地体现了动能定理的全过程使用的优点.

解法 3 利用了动力学知识分析了物件在传送带的运动过程,得到了“无效过程可以略去”这个思路,为其他更简洁的思路提供了分析基础.

解法 5 用到了比例法,思路简洁明了,但计算量偏大,不容易计算出多次返回时的最大距离.

综合比较,推荐解法 4 和解法 6,其相同点都是“略去无效过程”快速得到比例关系从而求解.

2.3 “多题归一”

学生戊:受学生甲启发,想到了之前的一道练习题.

练习题:如图 3 所示,已知斜面倾角为 θ ,物件与斜面间动摩擦因数为 $\mu (\mu < \tan \theta)$,一质量为 m 的物件从高 h 处无初速下滑,滑至底端时与固定在斜面底端的挡板碰撞,碰撞中无能量损失.求物件在斜面上通过的总路程 s .

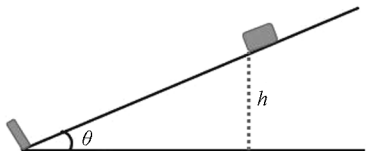


图 3 练习题示意图

解:全过程由动能定理可得

$$mgh - \mu mg s \cos \theta = 0$$

得

$$s = \frac{h}{\mu \cos \theta}$$

学生戊:考试题中的传送带相当于此题中的挡板,提供“原速率返回”的作用,练习题目是让求物件滑行的总距离,练习题也可以用以上方法求第 2 次弹回时距离挡板的最大距离.

学生己:那么考试题中我们也可以求物件在传送带上运动的总距离,都是用到了全过程的分析.

2.4 “一题多变”

此时对学生说明,为了降低考试难度将初稿中的“第四次上滑”改为了“第二次上滑”.

有了上述的讨论,学生容易得到原稿中第四次上滑的距离为

$$x_4 = L_2 \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{64}{243} \text{ m}$$

继续探讨,因为每次上滑距离为等比数列,所以求物件在传送带上滑行总距离时可以利用等比数列求和公式来解,部分学生经过计算两种方法得到的结果相同,总滑行路程 $s = \frac{20}{3} \text{ m}$.

2.5 “一题多问”

课下学生们对此题再做进一步的梳理,在原题 (1) ~ (3) 问的基础上继续总结完成下面 4 问.

(4) 假如机械手未能在 D 点及时将物件取走,导致物件重新下滑,则此后它第四次向上返回木板时距离 C 点的最大距离?

(5) 假如机械手未能在 D 点及时将物件取走,导致物件重新下滑,则此后它第四次向下经过传送带时离 C 点的最大距离?

(6) 假如机械手未能在 D 点及时将物件取走,导致物件重新下滑,则此后它在木板上运动的总路程?

(7) 假如机械手未能在 D 点及时将物件取走,导致物件重新下滑,则此后它在传送带上运动的总路程?

在教学实践中,教师适当时候进行“一题多解”“一题多变”等操作,可以让学生更好地对已学知识进行对比归纳,从而加深对知识的理解.但如果将每一题都尝试“一题多解”等操作,教师和学生的时间、精力可能达不到.一个可行的方案是,当学生独立完成后解答学习小组内不同成员之间可以对比各自的解题方案,在交流中完成“一题多解”等操作,进而相互促进和提升.