巧设 △ 用微元思想解决物理问题*

徐清洪　　杨　冰

（重庆市第八中学校　　重庆　401120）

（收稿日期：2023－04－12）

摘　要：微元法是分析、解决物理问题常用的方法，微元法可以把复杂的物理过程简化为学生熟知的简单的物理过程、物理规律. 以 3 个问题为例，在分析和解决问题过程中通过微元法巧妙设置 Δl、ΔT、$\Delta\theta$，避开繁杂运算过程，旨在培养学生从局部到整体的科学思维和提高学生运用核心知识解决问题的能力.

关键词：微元法；加速度；液柱移动；压强；转动切割

1　引言

微元法指将研究过程划分成多个微小单元，微小单元依然遵循物理基本规律，当对时间、位移、转角等物理量取微小单元时，部分相关物理量在微小单元内不会发生明显变化，可以将其处理成定量[1]. 由于数学学习的阶段性，很多需要应用到高等数学中微积分知识求解的物理问题成为高中阶段的学生最大的“难题”. 但是，如果通过“微元法”把研究对象划分为无穷多个小部分，化变力为恒力，化曲线为直线，再从局部到整体就可以很好地解决学生的困难. 下面我们列举了高中阶段 3 种类型问题，共同特点是采用微元法巧妙设置 Δl、ΔT、$\Delta\theta$，轻松地避开了繁杂的运算过程.

2　问题 1：连接体加速度问题

【例 1】如图 1 所示，将质量为 $2m$ 的重物悬挂在轻绳的一端，轻绳的另一端系一质量为 m 的小环，小环套在竖直固定的光滑直杆上，光滑定滑轮与直杆的距离为 d. 现将小环从与定滑轮等高的 O 处由静止释放，A 处在 O 处正下方距离为 d 处，则下列说法正确的是（　　）

A. 小环刚释放时轻绳中的张力一定大于 $2mg$

B. 小环在 A 处的速度与重物上升的速度大小之比等于 $\sqrt{2}:1$

C. 小环下降速度最大时，轻绳中的张力一定等于 $2mg$

D. 小环从 O 处开始能够下降的最大高度为 $4d$

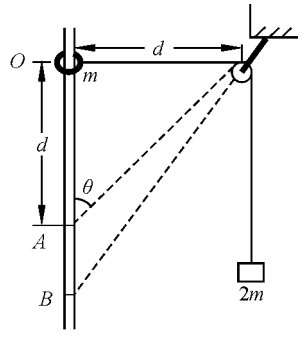

图 1　例 1 题图

解法 1：定量计算

判断选项 C 正误方法如下.

本题的难点在选项 C 判断，部分学生会根据速度关联得出小环速度最大时重物速度也最大，重物加速度为零，张力与重物重力平衡，为解决该疑惑，可设细线与杆之间夹角为 θ，由关联速度可知

$$v_{环}\cos\theta=v_{物}$$

上式两边对 t 求导

$$a_{环}\cos\theta+\frac{\mathrm{d}(\cos\theta)}{\mathrm{d}t}v_{环}=a_{物}$$

$$a_{物}=a_{环}\cos\theta-v_{环}\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

向下运动过程中 θ 减小，故 $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-\omega$，$a_{物}=a_{环}\cos\theta+\omega v_{环}\sin\theta$，当圆环速度达到最大值 $v_{环m}$ 时，$a_{环}=0$，但此时 $a_{物}=\omega v_{环}\sin\theta$，$a_{物}=\frac{v_{环}^2}{d}\sin^3\theta$ 不为零，因此绳子张力不等于重物重力 $2mg$，选项 C 错误.

* 重庆市教育科学“十四五”规划 2022 年度一般课题“基于培养物理学科关键能力的深度教学研究”阶段性成果，课题编号：K22YG111514.

解法 2:微元法

取环速度达到最大时附近一小段运动 ABC,将其平均分为两段,每段长为 Δl,由于时间非常短这一小段运动可以近似处理成匀速运动,如图 2 所示. AB 段运动使定滑轮左侧细线长度改变量 $\Delta x_1=\Delta l\cos\theta_1$,$BC$ 段运动细线长度改变量 $\Delta x_2=\Delta l\cos\theta_2$,由于 $\theta_1>\theta_2$,有 $\Delta x_2>\Delta x_1$,在小环匀速从 A 到 B 到 C 过程中,细线长度改变越来越快,物件在加速上升.

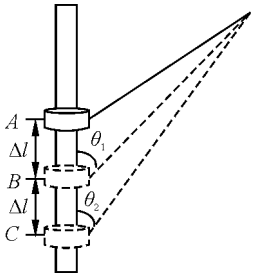

图 2　例 1 分析图

据以上分析判断结论为:小环速度最大时,小环加速度为零,而重物在加速上升,细线拉力大于 $2mg$.

2　问题 2:判断液柱移动方向

【例 2】两个容器 A、B 用截面均匀的水平玻璃管相通,如图 3 所示,A、B 中所装气体温度分别为 10 ℃ 和 20 ℃,水银柱在管中央平衡,如果两边温度都升高10 ℃,则水银柱将(　　)

A. 向左移动　　B. 向右移动

C. 不动　　D. 无法确定

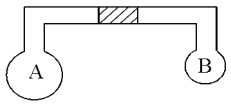

图 3　例 2 题图

解法 1:定量计算

假设温度升高过程气体体积不变,为等容变化,压强与温度成正比,有

$$p_A=k_AT_A\qquad p_B=k_BT_B$$

分析初始状态有 $p_{A0}=p_{B0}$,$T_{A0}<T_{B0}$,有 $k_A>k_B$,当两边气体同时升高10 ℃,压强变化 $\Delta p=k\Delta T$,所以有 $\Delta p_A>\Delta p_B$,经升温后,末状态 A 压强大于 B 压强,力学平衡被打破,液柱向 B 端移动.

解法 2:微元法

初始状态,水银柱在管中平衡左右两边气态压强相同均为 p_0,控制气体体积不变,将气体处理成理想气体,$p-T$ 图为过原点直线,如图 4 所示. 初始态左右气体压强一样大,A 温度低于 B 温度,A 斜率大. 两边都升高相同温度,在图像上以初始温度值 T_{A0}、T_{B0} 为起点取相同温度增量 ΔT,A、B 压强增量关系为 $\Delta p_A>\Delta p_B$,平衡打破,液柱向 B 侧移动.

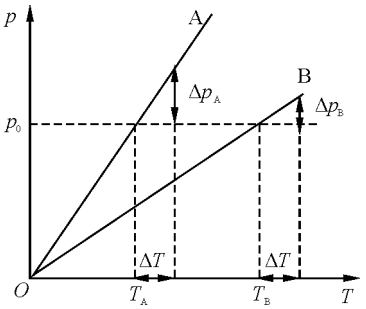

图 4　例 2 分析图

3　问题 3:2022 年山东高考理综卷第 12 题

【例 3】如图 5 所示,xOy 平面的第一、三象限内以坐标原点 O 为圆心、半径为 $\sqrt{2}L$ 的扇形区域充满方向垂直纸面向外的匀强磁场. 边长为 L 的正方形金属框绕其始终在 O 点的顶点、在 xOy 平面内以角速度 ω 顺时针匀速转动,$t=0$ 时刻,金属框开始进入第一象限. 不考虑自感影响,关于金属框中感应电动势 ε 随时间 t 变化规律的描述正确的是(　　)

A. 在 $t=0$ 到 $t=\dfrac{\pi}{2\omega}$ 过程中,ε 一直增大

B. 在 $t=0$ 到 $t=\dfrac{\pi}{2\omega}$ 过程中,ε 先增大后减小

C. 在 $t=0$ 到 $t=\dfrac{\pi}{2\omega}$ 过程中,ε 的变化率一直增大

D. 在 $t=0$ 到 $t=\dfrac{\pi}{2\omega}$ 过程中,ε 的变化率一直减小

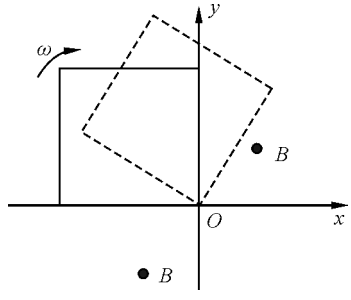

图 5　例 3 题图

判断选项 C、D 的方法如下.

解法 1:定量计算

如图 6 所示,t 时刻,线框转入一象限夹角 $\theta=\omega t$,切割磁场的有效长度为 $\dfrac{l}{\cos\theta}$,有效速度为 $v=\dfrac{1}{2}\dfrac{l}{\cos\theta}\omega$. 此时感应电动势

$$\varepsilon = B\frac{l}{\cos\omega t}\frac{\omega\dfrac{l}{\cos\omega t}}{2} = \frac{Bl^2\omega}{2}\frac{1}{\cos^2\theta}$$

其中

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1+\tan^2\theta$$

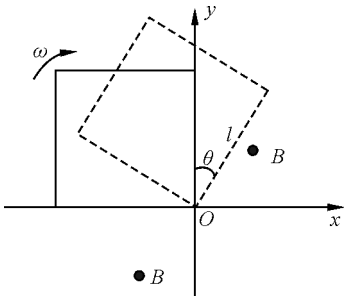

图 6　例 3 分析图

对 ε 随夹角变化函数式求导

$$\varepsilon' = Bl^2\omega\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}$$

其中 $\theta=\omega t$.

在 $t=0$ 到 $t=\dfrac{\pi}{4\omega}$ 过程中，即从 $\theta=0$ 到 $\theta=45°$，$\sin\theta$ 一直增大，$\cos\theta$ 一直减小，ε' 一直增大.

解法 2：微元法

从 $\theta=0$ 到 $\theta=45°$ 过程中，将线框旋入磁场过程均分成很多连续相等小段 $\Delta\theta$，由于线框匀速转动，$\Delta\theta$ 对应时间均为 Δt，如图 7 所示，取其中第 n、$n+1$、$n+2$ 小段旋转运动为例.

角度 1：从面积角度，相邻相等时间内 Δt 内电动势变化量 $\Delta\varepsilon$，有 $\Delta\varepsilon=\dfrac{B\Delta S}{\Delta t}$，如图可知相邻、相等时间 Δt 内 ΔS 逐渐增大，因此在 $t=0$ 到 $t=\dfrac{\pi}{4\omega}$ 的过程中，ε 的变化率 $\dfrac{\Delta\varepsilon}{\Delta t}$ 一直增大，选项 C 正确.

角度 2：从切割的有效长度来看，相邻、相等时间 Δt 内电动势变化量 $\Delta\varepsilon$，有 $\Delta\varepsilon\propto\Delta l$，由图可知 Δl 逐渐增大，ε 的变化率 $\dfrac{\Delta\varepsilon}{\Delta t}$ 一直增大，选项 C 正确.

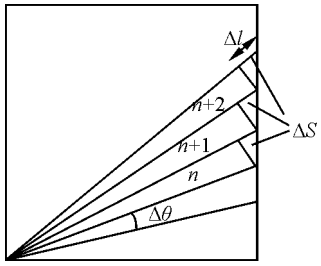

图 7　微元法分析图

4　结束语

连接体加速度关联问题、判断液柱移动方向、判断感应电动势变化率变化情况，是高中学生学习过程中不可避免的几个重点难题，本文在运动及变化过程中设置 Δl、ΔT、$\Delta\theta$，运用了微元法的思想，结合物理图例图像解决问题，巧妙、合理地避开了繁杂的运算过程，培养了学生物理科学思维的同时，提高学生分析问题、解决问题的能力.

参 考 文 献

[1] 臧凯泉. 微元法在高中物理解题中的有效应用研究[J]. 数理化解题研究，2022(21)：70－72.

Cleverly Selecting Δ: Solving Physics Questions with Micro-Element Ideas

XU Qinghong　YANG Bing

(Chongqing NO. 8 Secondary School, Chongqing　401120)

Abstract: The micro-element method is a common method for analyzing and solving physical questions, and the micro-element method can simplify the complex physical processes into simple physical processes and physical laws that students are familiar with. In this paper, we take three question examples and cleverly set Δl, ΔT, and $\Delta\theta$ through the micro-element method in the process of analyzing and solving questions, avoiding the complicated operation process, aiming to cultivate students' scientific thinking from the part to the whole and improve students' ability to use core knowledge to solve questions.

Key words: micro-element method; acceleration; liquid column movement; pressure; rotational cutting