

弯管内流体受到合外力公式的推导及应用

郑 金

(凌源市职教中心 辽宁 朝阳 122500)

(收稿日期:2023-04-15)

摘 要:利用质点组的动量定理推导了一段弯管内流体受到合外力矢量的公式,利用该公式以及弯管内整个流体动量变化量的推导方法,分别解答了两道有关弯管内的流体力学问题.

关键词:弯管;流体;合外力矢量;公式

当流体通过弯管时,运动方向发生了改变,则动量发生了改变,因此流体对弯管会产生作用力.只要推出弯管内的流体受到合外力的公式,通过分析合外力,即可得到流体受到弯管作用力的关系式,那么根据牛顿第三定律可知流体对弯管的作用力关系式.下面首先推导弯管内的流体受到合外力矢量的公式,然后用来解答两道有关弯管内的流体对弯管产生作用力的问题.

1 公式推导

如图1(a)所示,液体在弯管内稳定流动,可视为理想流体.取横截面 a_1 和 a_2 之间的液体作为研究对象,经过很短时间 Δt 后,液体运动到横截面 b_1 和 b_2 之间,如图1(b)所示.

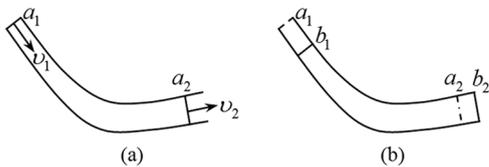


图1 流体通过弯管时初、末状态对比图

在 Δt 时间内研究对象的动量增量等于 b_1b_2 段的总动量减去 a_1a_2 段的总动量.然而,对于稳定流动,在横截面 b_1 和 a_2 之间的液体各点的流速不随时间而改变,即 b_1a_2 段液体的总动量保持不变,因此,研究对象在时间 Δt 内动量的增量等于出口处 a_2b_2 段的总动量与入口处 a_1b_1 段的总动量之差.这两段液柱的长度都很短,因此可视为圆柱体,并且认为每段内部各点的流速相同,那么在 Δt 时间内研究对象

动量的增量为

$$\Delta p = \rho \Delta S_2 \Delta l_2 \mathbf{v}_2 - \rho \Delta S_1 \Delta l_1 \mathbf{v}_1$$

该研究对象可视为由液体微元组成的质点组,若忽略研究对象受到的重力,则其受到的外力有3个,即两端受到其他部分液体的压力以及背部受到管壁的压力,如图2所示.

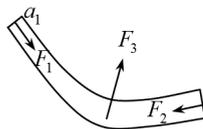


图2 对弯管内整个流体受力分析

设在 Δt 内外力的矢量和关于时间的平均值为 \mathbf{F} ,根据质点组的动量定理有 $\mathbf{F}\Delta t = \Delta p$,可知

$$\mathbf{F} = \rho \Delta S_2 \frac{\Delta l_2}{\Delta t} \mathbf{v}_2 - \rho \Delta S_1 \frac{\Delta l_1}{\Delta t} \mathbf{v}_1$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta l_2}{\Delta t} = v_2 \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta l_1}{\Delta t} = v_1$$

而且平均力为瞬时值,则合外力的瞬时值为

$$\mathbf{F} = \rho \Delta S_2 v_2 \mathbf{v}_2 - \rho \Delta S_1 v_1 \mathbf{v}_1$$

根据不可压缩流体的连续性,则流量为

$$Q = \Delta S_2 v_2 = \Delta S_1 v_1$$

联立方程可得

$$\mathbf{F} = \rho Q (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \quad (1)$$

式(1)即为弯管内的流体受到合外力矢量的公式.

合外力等于各外力的矢量和,即

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$$

流体的质量流率为

$$\dot{m} = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho \frac{\Delta V}{\Delta t} = \rho Q$$

由此可知,若忽略弯管内流体受到的重力以及两端受到的压力,则流体受到弯管的作用力矢量为

$$\mathbf{F}_3 = \rho Q(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$$

若弯管粗细均匀,则流量为

$$Q = \frac{V}{t} = Sv$$

可得

$$\mathbf{F}_3 = \rho Sv(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$$

根据牛顿第三定律可知,流体对弯管的作用力矢量为

$$\mathbf{F}'_3 = -\rho Sv(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$$

在上述推导过程中,关键是分析很短一段时间内整体的动量变化量.由于时间很短,则从入口流入的质量与从出口流出的质量都很小,这样才能分别视为小圆柱体做匀速运动,而且在它们之间的液体的动量不随时间而改变,因此,整体动量的变化量等于很短时间内流出液体的动量与流入液体的动量之差.把这种推导方法称为流管法,是解决流体力学问题常用的方法^[1].此外,在推导过程中,通过对时间取极限,可把平均值转化为瞬时值.

2 公式应用

对于流体对弯管产生作用力的大小和方向,既可直接利用式(1)来求解,也可利用式(1)的推导方法即流管法来求解.

【例1】(武汉市2019届高中毕业生二月调研测试题第18题)运动员在水池上方做飞行表演,他操控的喷射式悬浮飞行器将软水带竖直送上的水流反转 180° 后从喷嘴竖直向下喷出,令自己悬浮在空中.已知运动员和装备的总质量为 90 kg ,两个喷嘴的直径均为 10 cm ,重力加速度 $g=10\text{ m/s}^2$,水的密度 $\rho=1\times 10^3\text{ kg/m}^3$,则喷嘴处喷水的速度大约为()

- A. 2.7 m/s B. 5.4 m/s
C. 7.6 m/s D. 10.8 m/s

解析:为了使水流方向改变 180° ,每个喷嘴都连接一段弯管,而且弯管两端开口竖直向下,那么水流在弯管两端的运动方向相反,如图3所示.

当水流通过弯管时,由于动量方向发生了改变,因此对弯管产生竖直向上的弹力 F .若装备悬浮在空中,则受力平衡,可知 $2F=mg$.

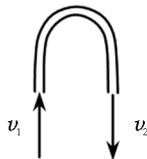


图3 弯管改变水流方向

设水流的速度大小为 v ,以弯管内的整个水柱为研究对象,可视为由液体微元组成的质点组,在很短时间 Δt 内水柱一端发生的位移 $\Delta x = v\Delta t$,从总体效果来看,弯管内整个水柱动量的变化量等于出口处刚流出一小段水柱的动量与入口处刚流入一小段水柱的动量之差,而小水柱的质量 $m_0 = \rho Sv\Delta t$,以竖直向下为正方向,则弯管内整个水柱的动量变化量为

$$\Delta p = m_0 v_2 - (-m_0 v_1)$$

对弯管内整个水柱由动量定理有

$$F' \Delta t = \Delta p$$

可得水柱受到管壁的作用力为

$$F = 2\rho Sv^2$$

由牛顿第三定律可知,水流对弯管的作用力为 $F = 2\rho Sv^2$,其中喷嘴的横截面积 $S = \frac{1}{4}\pi d^2$.

联立方程可得

$$v^2 = \frac{F}{2\rho S} = \frac{mg}{\rho\pi d^2}$$

代入数据得

$$v^2 \approx 30\text{ m}^2/\text{s}^2$$

由此知 $v \approx 5.4\text{ m/s}$.选项B正确.

点评:解题关键是理解水流对喷射式悬浮飞行器产生作用力的原理,即水流通过弯管时对弯管产生作用力.需利用题中的信息“将软水带竖直送上的水反转 180° 后从喷嘴竖直向下喷出”来判断水流方向的改变.此外,在推导动量变化量时利用了流管法,即选择弯管内整个水柱为研究对象,在很短时间内,动量的变化量只与这段时间内在弯管出口处喷出的一段小水柱和入口处进入的一段小水柱的动量有关,相当于一小段水柱从弯管的入口处迁移到出口处,运动方向发生改变,则动量发生改变,对弯管产生作用力.

【例2】如图4所示,用一个水平放置的 90° 弯管

输送水流,已知弯管两端管径分别为 $d_1=150\text{ mm}$, $d_2=75\text{ mm}$,左端管口处的压强 $p_1=2.06\times 10^5\text{ Pa}$,流量 $Q=0.02\text{ m}^3/\text{s}$.求:水流对弯管的作用力大小和方向.

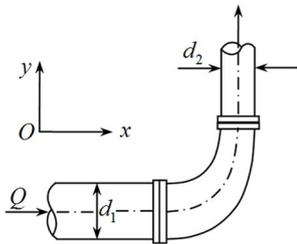


图4 例2题图

解析:水流在弯管入口与出口处的速率分别为

$$v_1 = \frac{Q}{S_1} = \frac{4Q}{\pi d_1^2} = 1.132\text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{Q}{S_2} = \frac{4Q}{\pi d_2^2} = 4.527\text{ m/s}$$

设弯管出口处的压强为 p_2 ,取同一流线上在入口处与出口处的两点,根据伯努利方程可知

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2$$

由此得

$$p_2 = p_1 - \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) = 1.96 \times 10^5\text{ Pa}$$

设弯管内的水流受到弯管的作用力大小为 F ,利用式(1)分别在 x 轴与 y 轴方向列方程为

$$p_1 S_1 - F_x = \rho Q(0 - v_1)$$

$$F_y - p_2 S_1 = \rho Q(v_2 - 0)$$

联立方程可得水流受到弯管作用力的分力为

$$F_x = 3\ 665\text{ N} \quad F_y = 958\text{ N}$$

由勾股定理可知水流受到的弯管的作用力大小

为 $F=3\ 786\text{ N}$,起点在坐标原点的矢量位于第二象限,与 x 轴反方向的夹角为

$$\theta = \arctan \frac{F_y}{F_x} = 14.66^\circ$$

由牛顿第三定律可知,水流对弯管的作用力大小 $F'=3\ 786\text{ N}$,起点在坐标原点的矢量位于第四象限,与 x 轴正方向的夹角 $\theta=14.66^\circ$.

点评:该题具有很强的综合性,不仅利用流量公式推导流速,而且应用伯努利方程推导压强.在对弯管内的流体应用动量定理列方程时,直接利用流体受到弯管的作用力矢量公式,但由于3个力的方向不在同一直线上,因此需利用正交分解法列方程,这样便于计算弯管对水流产生作用力的大小和方向.

3 总结

综上所述,解答有关液体通过弯管的动力学问题可有两种方法,即流管法与公式法.对弯管内整个液体受到合外力矢量公式的推导方法非常巧妙,这种方法的特点是整体法中含有微元法,即选择管道内的流体整体作为研究对象,但运动过程是一小段时间,流体整体动量的变化量与整体无关,只与很短时间内从管道两端流入与流出的小段流体的动量有关;同理,管道内流体整体动能的变化量与整体无关,只与很短时间内从管道两端流入与流出的小段流体的动能有关,这为解答有关流体动力学问题提供了巧妙的思路和方法.

参考文献

- [1] 漆安慎,杜婵英.力学基础[M].北京:高等教育出版社,1982:533-534.

Derivation and Application on the Formula for Resultant External Force Acting on the Fluid inside a Curved Pipe

ZHENG Jin

(Lingyuan Vocational Education Center, Chaoyang, Liaoning 122500)

Abstract: The momentum theorem of a group of particles was used to derive the formula for the external force vector acting on a fluid in a curved pipe. Using this formula and the derivation method of the momentum change of the entire fluid inside the bend, this paper solved two fluid dynamics questions related to the bend.

Key words: bent pipe; fluid; resultant external force vector; formula