竞赛与物理专题研修

一题多解 发散思维 提升能力

—— 一道求解加速度竞赛题的 5 种解法及变式研究

陈文天　宋海峰

（江苏省天一中学　江苏 无锡　214101）

（收稿日期：2023－05－08）

摘　要：研究一道求解加速度竞赛题的 5 种方法和典型变式，引导学生从不同的角度入手处理问题，体会各类科学方法的思维特点，从而帮助学生强化思维品质，提高解决问题的能力.

关键词：一题多解；加速度；科里奥利加速度；科学思维

一题多解，指从不同角度入手，运用不同思维方式解决同一问题的思想方法，是科学思维能力的重要体现[1]，也是物理竞赛教学中常用的教学手段之一. 一题多解训练，可充分增强学生思维的开阔性，引导他们将思维的触角伸向不同的维度；可充分锻炼学生思维的灵活性，提高他们运用物理知识解决问题的能力；可充分调动学生思维的积极性，培养他们对物理学科学习的兴趣. 本文研究了一道求解加速度竞赛题的 5 种解法和典型变式，以期为物理竞赛教学提供参考.

1　原题重现

图 1 为 3 根刚性细杆 AB、BC、CD 连成的平面连杆结构图. AB 杆和 CD 杆可分别绕过 A、D 垂直于纸面的固定轴转动，A、D 两点位于同一水平线上，BC 杆两端分别与 AB 杆和 CD 杆相连，可绕连接处转动(类似于铰链)，当 AB 杆以角速度 ω 匀速转动且处于竖直位置时，BC 杆和 CD 杆都与水平方向成 45° 角. 已知 AB 杆长度为 l，BC 杆的长度和 CD 杆的长度由图 1 给定. 求此时 C 点加速度的大小和方向(用与 CD 杆之间的夹角表示).

分析：这是一道求解加速度的典型问题，处理方法灵活多样. 作为练习，可引导学生从不同的参考系出发求解 C 点的加速度，帮助他们加深对相关知识的理解和认识，如平动参考系、转动参考系、平动转动参考系的加速度变换关系，科里奥利加速度等等.

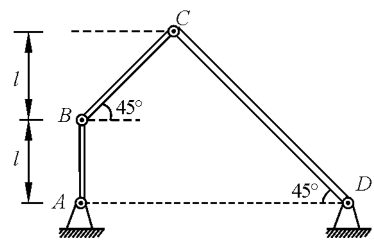

图 1　原题图

2　问题求解

解法 1：选与 B 相对静止的平动参考系. 如图 2 所示，建立以 C 为原点的平面直角坐标系. B 和 C 相对于地面的速度分别为

$$\boldsymbol{v}_B=\omega l\left(\cos\frac{\pi}{4}\boldsymbol{i}-\sin\frac{\pi}{4}\boldsymbol{j}\right)$$

$$\boldsymbol{v}_C=\left(-\omega l\sin\frac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{j}$$

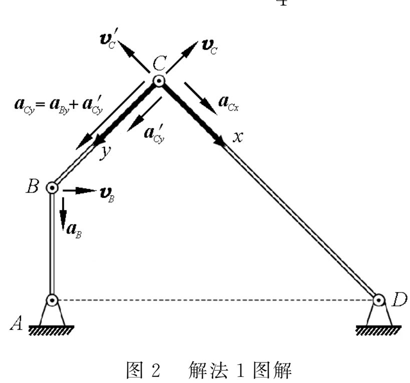

图 2　解法 1 图解

在地面参考系中，C 的法向加速度

$$\boldsymbol{a}_{Cx}=\frac{|\boldsymbol{v}_C|^2}{|\overrightarrow{CD}|}\boldsymbol{i}=\frac{\sqrt{2}}{8}\omega^2 l\boldsymbol{i}$$

作者简介：陈文天(1994－　)，男，博士，主要从事高中物理教学研究.

B 的加速度为

$$\boldsymbol{a}_B=\frac{|\boldsymbol{v}_B|^2}{|\overrightarrow{AB}|}\left(\cos\frac{\pi}{4}\boldsymbol{i}+\sin\frac{\pi}{4}\boldsymbol{j}\right)=\omega^2 l\left(\cos\frac{\pi}{4}\boldsymbol{i}+\sin\frac{\pi}{4}\boldsymbol{j}\right)$$

在与 B 相对静止的平动参考系中,C 相对于 B 转动的速度为

$$\boldsymbol{v}'_C=\boldsymbol{v}_C-\boldsymbol{v}_B=\left(-\omega l\sin\frac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{j}-\omega l\left(\cos\frac{\pi}{4}\boldsymbol{i}-\sin\frac{\pi}{4}\boldsymbol{j}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\omega l\boldsymbol{i}$$

C 相对于 B 转动的法向加速度为

$$\boldsymbol{a}'_{Cy}=\frac{|\boldsymbol{v}'_C|^2}{|\overrightarrow{BC}|}\boldsymbol{j}=\frac{\sqrt{2}}{4}\omega^2 l\boldsymbol{j}$$

根据平动参考系的加速度变换关系,C 相对于地面的切向加速度 $\boldsymbol{a}_{Cy}$,B 的加速度在 y 方向上的分量 $\boldsymbol{a}_{By}$,C 相对于 B 转动的法向加速度 $\boldsymbol{a}'_{Cy}$ 满足

$$\boldsymbol{a}_{Cy}=\boldsymbol{a}_{By}+\boldsymbol{a}'_{Cy}=\frac{3}{4}\sqrt{2}\omega^2 l\boldsymbol{j}$$

因此 C 点的加速度大小 $|\boldsymbol{a}_C|$ 和方向角 δ 分别为

$$|\boldsymbol{a}_C|=\sqrt{a_{Cx}^2+a_{Cy}^2}=\frac{\sqrt{74}}{8}\omega^2 l$$

$$\delta=\arctan\frac{a_{Cy}}{a_{Cx}}=\arctan 6$$

另外,选取与 C 相对静止的平动参考系也可求解,过程和解法 1 类似,不再赘述.

解法 2:如图 3 所示,选与 B 端相对静止的、随 B 平动并绕 B 转动的参考系.

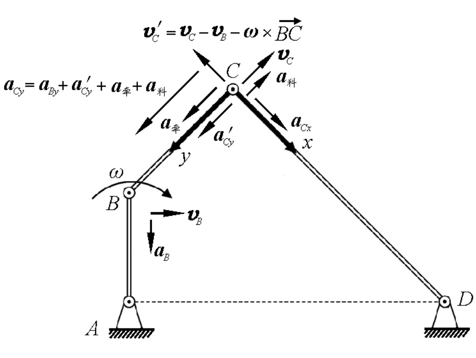

图 3　解法 2 图解

不妨设平动转动系的角速度为 ω 且沿顺时针方向转动,B 的平动加速度

$$\boldsymbol{a}_B=\omega^2 l\left(\cos\frac{\pi}{4}\boldsymbol{i}+\sin\frac{\pi}{4}\boldsymbol{j}\right)$$

在此平动转动系中,C 的相对速度 $\boldsymbol{v}'_C$ 为

$$\boldsymbol{v}'_C=\boldsymbol{v}_C-\boldsymbol{v}_B-\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{BC}=\left(-\omega l\sin\frac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{j}-\omega l\left(\cos\frac{\pi}{4}\boldsymbol{i}-\sin\frac{\pi}{4}\boldsymbol{j}\right)-\sqrt{2}\omega l\boldsymbol{i}=-\frac{3}{2}\sqrt{2}\omega l\boldsymbol{i}$$

C 在 y 方向的相对加速度

$$\boldsymbol{a}'_{Cy}=\frac{\boldsymbol{v}'^2_C}{|\overrightarrow{BC}|}\boldsymbol{j}=\frac{9}{4}\sqrt{2}\omega^2 l\boldsymbol{j}$$

牵连加速度为

$$\boldsymbol{a}_{牵}=\omega^2|\overrightarrow{BC}|\boldsymbol{j}=\sqrt{2}\omega^2 l\boldsymbol{j}$$

科里奥利加速度为

$$\boldsymbol{a}_{科}=2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'_C=-3\sqrt{2}\omega^2 l\boldsymbol{j}$$

在 y 方向上运用平动转动系中加速度的变换关系,求解 C 加速度的 y 方向分量

$$\boldsymbol{a}_{Cy}=\boldsymbol{a}_{By}+\boldsymbol{a}'_{Cy}+\boldsymbol{a}_{牵}+\boldsymbol{a}_{科}$$

得到

$$\boldsymbol{a}_{Cy}=\frac{3}{4}\sqrt{2}\omega^2 l\boldsymbol{j}$$

综合 C 加速度的 x 方向分量

$$\boldsymbol{a}_{Cx}=\frac{\sqrt{2}}{8}\omega^2 l\boldsymbol{i}$$

得到

$$|\boldsymbol{a}_C|=\sqrt{a_{Cx}^2+a_{Cy}^2}=\frac{\sqrt{74}}{8}\omega^2 l$$

$$\delta=\arctan\frac{a_{Cy}}{a_{Cx}}=\arctan 6$$

另外,选与 C 端相对静止的、随 C 平动并绕 C 转动的平动转动系也可求解,过程与解法 2 类似,不再赘述.

解法 3:选与 B 端相对静止的、绕 A 点转动的参考系,如图 4 所示.

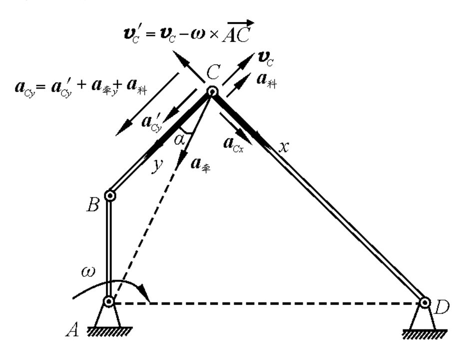

图 4　解法 3 图解

不妨设此转动参考系的角速度为 ω 且沿顺时针方向转动. 在此参考系中,C 的相对速度为

$$\boldsymbol{v}'_C=\boldsymbol{v}_C-\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{AC}=\left(-\omega l\cos\frac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{j}-\sqrt{5}\omega l(\cos\alpha\boldsymbol{i}-\sin\alpha\boldsymbol{j})$$

在 $\triangle ABC$ 中

$$\cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2}{2|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{3}{10}\sqrt{10}$$

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

代入得到

$$\boldsymbol{v}'_C=-\frac{3}{2}\sqrt{2}\omega^2 l\boldsymbol{i}$$

C 在 y 方向的相对加速度

$$\boldsymbol{a}'_{Cy}=\frac{|\boldsymbol{v}'_C|^2}{|\overrightarrow{BC}|}\boldsymbol{j}=\frac{9\sqrt{2}}{4}\omega^2 l\boldsymbol{j}$$

牵连加速度为

$$\boldsymbol{a}_{牵}=\sqrt{5}\omega^2 l(\sin\alpha\boldsymbol{i}+\cos\alpha\boldsymbol{j})=\frac{\sqrt{2}}{2}\omega^2 l\boldsymbol{i}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\omega^2 l\boldsymbol{j}$$

科里奥利加速度为

$$\boldsymbol{a}_{科}=2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'_C=-3\sqrt{2}\omega^2 l\boldsymbol{j}$$

根据转动参考系的加速度变换关系，求解 C 加速度的 y 方向分量

$$\boldsymbol{a}_{Cy}=\boldsymbol{a}'_{Cy}+\boldsymbol{a}_{牵y}+\boldsymbol{a}_{科}=\frac{3}{4}\sqrt{2}\omega^2 l\boldsymbol{j}$$

综合 C 加速度的 x 方向分量

$$\boldsymbol{a}_{Cx}=\frac{\sqrt{2}}{8}\omega^2 l\boldsymbol{i}$$

得到

$$|\boldsymbol{a}_C|=\sqrt{a_{Cx}^2+a_{Cy}^2}=\frac{\sqrt{74}}{8}\omega^2 l$$

$$\delta=\arctan\frac{a_{Cy}}{a_{Cx}}=\arctan 6$$

另外，选与 C 端相对静止、绕 D 点转动的参考系也可求解，过程与解法 3 类似，不再赘述.

解法 4：微元法. 如图 5 所示，不妨设 B 沿顺时针转动，则

$$v_B=\omega l$$

方向水平向右

$$v_C=v_B\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\omega l$$

方向由 B 指向 C. 则 C 转动的角速度大小为

$$\frac{|\boldsymbol{v}_C|}{|\overrightarrow{CD}|}=\frac{1}{4}\omega$$

取一段极短的时间 Δt，其间 AB 杆转过的角度为 $\omega\Delta t$，则 CD 杆转过的角度为 $\frac{1}{4}\omega\Delta t$. 延长 AB'、DC' 交于点 O'，在 $\triangle O'AD$ 中，由正弦定理得到

$$\frac{O'A}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\omega\Delta t\right)}=\frac{O'D}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\omega\Delta t\right)}=\frac{AD}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3}{4}\omega\Delta t\right)}$$

这里

$$AD=3l$$

因此

$$O'A=\frac{3l\left[\cos\left(\frac{\omega\Delta t}{4}\right)+\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{4}\right)\right]}{\cos\left(\frac{3\omega\Delta t}{4}\right)+\sin\left(\frac{3\omega\Delta t}{4}\right)}$$

$$O'D=\frac{3\sqrt{2}l\cos(\omega\Delta t)}{\cos\left(\frac{3\omega\Delta t}{4}\right)+\sin\left(\frac{3\omega\Delta t}{4}\right)}$$

同时

$$O'B'=O'A-B'A=\frac{3l\left[\cos\left(\frac{\omega\Delta t}{4}\right)+\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{4}\right)\right]}{\cos\left(\frac{3\omega\Delta t}{4}\right)+\sin\left(\frac{3\omega\Delta t}{4}\right)}-l$$

$$O'C'=O'D-C'D=\frac{3\sqrt{2}l\cos(\omega\Delta t)}{\cos\left(\frac{3\omega\Delta t}{4}\right)+\sin\left(\frac{3\omega\Delta t}{4}\right)}-2\sqrt{2}l$$

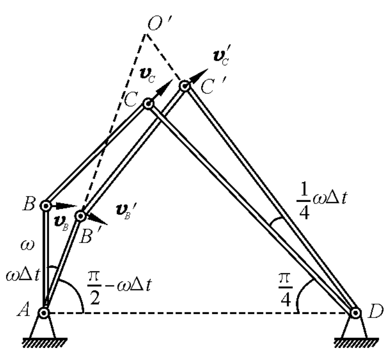

图 5　解法 4 图解

由于 O' 是杆 BC 运动至 $B'C'$ 时的速度瞬心，有

$$\frac{v'_B}{O'B'}=\frac{v'_C}{O'C'}$$

而 $v'_B=\omega l$，从而

$$v'_C=\frac{\sqrt{2}\omega l\left[3\cos(\omega\Delta t)-2\cos\left(\frac{3\omega\Delta t}{4}\right)-2\sin\left(\frac{3\omega\Delta t}{4}\right)\right]}{3\cos\left(\frac{\omega\Delta t}{4}\right)+3\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{4}\right)-\cos\left(\frac{3\omega\Delta t}{4}\right)-\sin\left(\frac{3\omega\Delta t}{4}\right)}$$

进而求解 C 的切向加速度(略去高阶小量)

$$a_{C切}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v'_C-v_C}{\Delta t}=$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sqrt{2}\,\omega l\,\dfrac{1-\dfrac{3}{2}\omega\Delta t}{2}-\dfrac{\sqrt{2}\,\omega l}{2}}{\Delta t}=-\frac{3}{4}\sqrt{2}\,\omega^2 l$$

负号表明其方向由 C 指向 B. C 的法向加速度

$$a_{C法}=\frac{v_C^2}{CD}=\frac{\sqrt{2}}{8}\omega^2 l$$

方向由 C 指向 D. 综上，

$$a_C=\sqrt{a_{法}^2+a_{切}^2}=\frac{\sqrt{74}}{8}\omega^2 l$$

解法 5：求导法. 如图 6 所示，建立以 A 为原点的平面直角坐标系. 设 $\angle BAD=\theta$，$\angle CDA=\alpha$，$\angle CBE=\varphi$，C 的位置可表示为

$$x_C=l\cos\theta+\sqrt{2}\,l\cos\varphi$$

$$y_C=l\sin\theta+\sqrt{2}\,l\sin\varphi$$

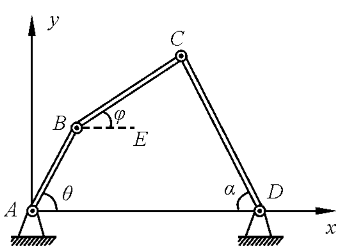

图 6 解法 5 图解

对位置 C 求关于时间 t 的一阶导数

$$\frac{\mathrm{d}x_C}{\mathrm{d}t}=-l\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\sqrt{2}\sin\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}y_C}{\mathrm{d}t}=l\left(\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\sqrt{2}\cos\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)$$

继续求二阶导数

$$\frac{\mathrm{d}^2x_C}{\mathrm{d}t^2}=-l\left[\cos\theta\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2+\sin\theta\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\sqrt{2}\cos\varphi\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2+\sqrt{2}\sin\varphi\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y_C}{\mathrm{d}t^2}=l\left[-\sin\theta\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2+\cos\theta\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}-\sqrt{2}\sin\varphi\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2+\sqrt{2}\cos\varphi\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\right]\qquad(1)$$

另外，由几何约束得到

$$2\sqrt{2}\,l\sin\alpha=l\sin\theta+\sqrt{2}\,l\sin\varphi$$

$$2\sqrt{2}\,l\cos\alpha=3l-l\cos\theta-\sqrt{2}\,l\cos\varphi$$

两式平方后相加，化简得

$$\sqrt{2}\sin\theta\sin\varphi+\sqrt{2}\cos\theta\cos\varphi-3\cos\theta-3\sqrt{2}\cos\varphi+2=0$$

对时间 t 求一阶导数

$$\sqrt{2}\cos\theta\sin\varphi\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\sqrt{2}\sin\theta\cos\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}-\sqrt{2}\sin\theta\cos\varphi\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}-\sqrt{2}\cos\theta\sin\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+3\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+3\sqrt{2}\sin\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=0$$

将 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$、$\varphi=\dfrac{\pi}{4}$、$\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-\omega$ 代入，得到

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\omega$$

继续求二阶导数

$$-\sqrt{2}\sin\theta\sin\varphi\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2+\sqrt{2}\cos\theta\cos\varphi\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\sqrt{2}\cos\theta\cos\varphi\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}-\sqrt{2}\sin\theta\sin\varphi\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2+\sqrt{2}\sin\theta\cos\varphi\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}-\sqrt{2}\cos\theta\cos\varphi\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2+\sqrt{2}\sin\theta\sin\varphi\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\sqrt{2}\sin\theta\sin\varphi\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}-\sqrt{2}\cos\theta\cos\varphi\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2-\sqrt{2}\cos\theta\sin\varphi\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+3\cos\theta\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2+3\sqrt{2}\cos\varphi\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2+3\sqrt{2}\sin\varphi\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}=0$$

将 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$、$\varphi=\dfrac{\pi}{4}$、$\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-\omega$、$\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=0$ 代入，得到

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}=\frac{3}{8}\omega^2$$

将 $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\omega$、$\dfrac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{3}{8}\omega^2$、$\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-\omega$、$\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=0$ 代入式 (1)，得到

$$\frac{\mathrm{d}^2x_C}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{5}{8}\omega^2 l$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y_C}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{7}{8}\omega^2 l$$

进而得到

$$|\boldsymbol{a}_C|=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2x_C}{\mathrm{d}t^2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^2y_C}{\mathrm{d}t^2}\right)^2}=\frac{\sqrt{74}}{8}\omega^2 l$$

3 总结和变式

以上 5 种解法虽有差异，但基本思路相通. 紧扣杆长不变的几何约束，以及杆连接点速度、加速度的约束关系是运用上述方法解决本题的关键.

下面再对本题进行适当的变式和求解.

变式 1：如图 7 所示，将原题中的条件改为“当

AB 杆以角速度 ω、角加速度 β 转动且处于竖直位置时”，其他条件不变，求 C 点的加速度.

分析：抓住 AB、BC、CD 杆长度不变的约束条件，B 点、C 点处沿杆速度分量连续的特点，以及在不同参考系变换情形下 C 点加速度满足的关系可求解. 这里我们模仿解法 1 的步骤来求解，其他解法的思路对于解决本题而言也同样适用，这里不再赘述.

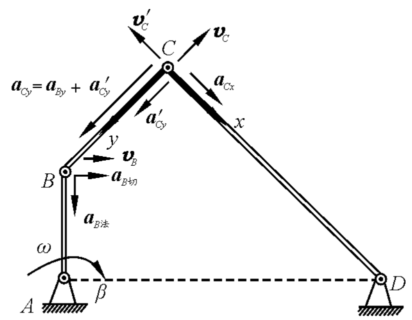

图 7　变式 1 图解

求解：选与 B 相对静止的平动参考系. 如图 7，建立以 C 为原点的平面直角坐标系. B 和 C 相对于地面的速度分别为

$$\boldsymbol{v}_B=\omega l\left(\cos\frac{\pi}{4}\boldsymbol{i}-\sin\frac{\pi}{4}\boldsymbol{j}\right)$$

$$\boldsymbol{v}_C=\left(-\omega l\sin\frac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{j}$$

在地面参考系中，C 的法向加速度

$$\boldsymbol{a}_{Cx}=\frac{|\boldsymbol{v}_C|^2}{|\overrightarrow{CD}|}\boldsymbol{i}=\frac{\sqrt{2}}{8}\omega^2 l\boldsymbol{i}$$

B 的法向加速度为

$$\boldsymbol{a}_{B法}=\frac{|\boldsymbol{v}_B|^2}{|\overrightarrow{AB}|}\left(\cos\frac{\pi}{4}\boldsymbol{i}+\sin\frac{\pi}{4}\boldsymbol{j}\right)=$$

$$\omega^2 l\left(\cos\frac{\pi}{4}\boldsymbol{i}+\sin\frac{\pi}{4}\boldsymbol{j}\right)$$

B 的切向加速度为

$$\boldsymbol{a}_{B切}=l\beta\left(\cos\frac{\pi}{4}\boldsymbol{i}-\sin\frac{\pi}{4}\boldsymbol{j}\right)$$

在与 B 相对静止的平动参考系中，C 相对于 B 转动的速度为

$$\boldsymbol{v}'_C=\boldsymbol{v}_C-\boldsymbol{v}_B=-\frac{\sqrt{2}}{2}\omega l\boldsymbol{i}$$

C 相对 B 转动的法向加速度为

$$\boldsymbol{a}'_{Cy}=\frac{|\boldsymbol{v}'_C|^2}{|\overrightarrow{BC}|}\boldsymbol{j}=\frac{\sqrt{2}}{4}\omega^2 l\boldsymbol{j}$$

根据平动参考系的加速度变换关系，C 相对于地面的切向加速度 $\boldsymbol{a}_{Cy}$，B 的加速度在 y 方向上的分量 $\boldsymbol{a}_{By}$，C 相对于 B 转动的法向加速度 $\boldsymbol{a}'_{Cy}$ 满足

$$\boldsymbol{a}_{Cy}=\boldsymbol{a}_{By}+\boldsymbol{a}'_{Cy}=\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\omega^2 l-\frac{\sqrt{2}}{2}l\beta\right)\boldsymbol{j}$$

因此 C 点的加速度 $\boldsymbol{a}_C$ 满足

$$\boldsymbol{a}_{Cx}=\frac{\sqrt{2}}{8}\omega^2 l\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{a}_{Cy}=\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\omega^2 l-\frac{\sqrt{2}}{2}l\beta\right)\boldsymbol{j}$$

变式 2：如图 8 所示，将原题的三杆系统上下颠倒，设 3 根杆的材质均相同，且质量分布均匀，AB 杆的质量为 m. 系统起始静止，并在重力作用下转动，重力加速度为 g，求起始时 B 点、C 点的加速度.

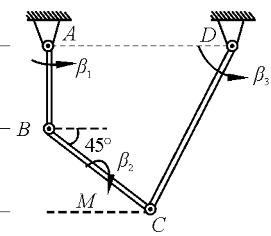

图 8　变式 2 题图

分析：在初始状态，B 点、C 点速度均为零，这两点都没有法向加速度，只有切向加速度. 根据三根杆长度不变的约束可得到 B 点、C 点切向加速度与杆角加速度之间的关系，然后利用刚体转动的动力学关系求得杆的角加速度，进而得到最终结果.

求解：如图 8 所示，设 BC 杆中点为 M，AB 杆绕 A 点的角加速度为 β_1，BC 杆绕 M 点的角加速度为 β_2，CD 杆绕 D 点的角加速度为 β_3. 如图 9 所示，由于 B 点处的加速度只有切向分量，根据加速度的关联关系得到

$$a_{My}=\frac{\sqrt{2}}{2}l\beta_2\sin 45°\text{（无法向加速度分量）}$$

$$l\beta_1=\frac{\sqrt{2}}{2}l\beta_2\cos 45°+a_{Mx}\text{（切向加速度分量）}$$

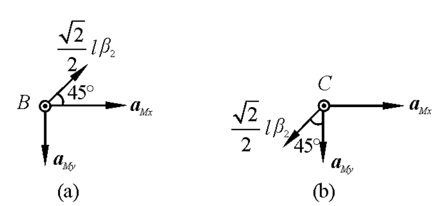

图 9　B、C 点分析

同理在 C 点有

$$a_{My}\cos 45°+\frac{\sqrt{2}}{2}l\beta_2=$$

$a_{Mx}\cos 45°$（无法向加速度分量）

$2\sqrt{2}\,l\beta_3 = a_{My}\sin 45° + a_{Mx}\sin 45°$（切向加速度分量）

综合以上 4 式可解得

$$a_{Mx} = \frac{3}{2}l\beta_2 \qquad a_{My} = \frac{1}{2}l\beta_2 \qquad \beta_1 = 2\beta_2 = 4\beta_3$$

下面继续考察 3 根杆转动的动力学关系. 对 AB 杆，以 A 为转轴，如图 10 所示，有

$$F_{1x}l = I_1\beta_1 = \frac{1}{3}ml^2\beta_1$$

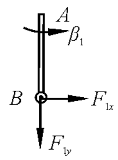

图 10　AB 杆分析图

对 BC 杆（图 11），其质心加速度满足

$$F_{2x} - F_{1x} = \sqrt{2}\,ma_{Mx}$$

$$\sqrt{2}\,mg + F_{2y} - F_{1y} = \sqrt{2}\,ma_{My}$$

BC 杆绕质心 M 转动的角加速度 β_2 满足

$$(F_{1y} + F_{2y})\frac{\sqrt{2}}{2}l\sin 45° - (F_{1x} + F_{2x})\cdot$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}l\cos 45° = I_2\beta_2 = \frac{1}{12}\sqrt{2}\,m\,(\sqrt{2}\,l)^2\beta_2$$

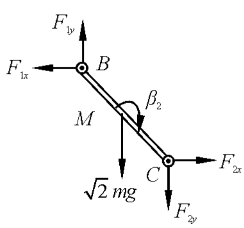

图 11　BC 杆分析图

综合对 AB 杆、BC 杆动力学关系的分析可得

$$F_{1x} = \frac{1}{3}ml\beta_1$$

$$F_{2x} = \frac{1}{3}ml\beta_1 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\,ml\beta_2$$

$$F_{1y} = \frac{1}{3}ml\beta_1 + \frac{2}{3}\sqrt{2}\,ml\beta_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}mg$$

$$F_{2y} = \frac{1}{3}ml\beta_1 + \frac{7}{6}\sqrt{2}\,ml\beta_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}mg$$

对 CD 杆分析如图 12 所示，其绕 D 点转动满足关系

$$2\sqrt{2}\,mg\cdot\sqrt{2}\,l\cos 45° - F_{2x}\cdot 2\sqrt{2}\,l\sin 45° -$$

$$F_{2y}\cdot 2\sqrt{2}\,l\cos 45° =$$

$$I_3\beta_3 = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}\,m)(2\sqrt{2}\,l)^2\beta_3$$

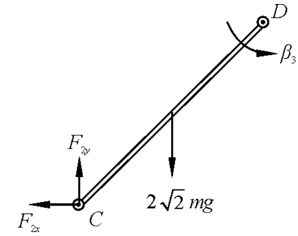

图 12　CD 杆分析图

将 F_{2x}、F_{2y} 以及 $\beta_1 = 2\beta_2 = 4\beta_3$ 的关系代入，得到

$$\beta_1 = \frac{9(6-\sqrt{2})g}{68l}$$

$$\beta_2 = \frac{9(6-\sqrt{2})g}{136l}$$

$$\beta_3 = \frac{9(6-\sqrt{2})g}{272l}$$

因此 B 的加速度

$$a_B = l\beta_1 = \frac{9(6-\sqrt{2})}{68}g$$

方向水平向右. C 的加速度

$$a_C = 2\sqrt{2}\,l\beta_3 = \frac{9(3\sqrt{2}-1)}{68}g$$

方向沿右下方与水平方向夹角为 45°.

4　结束语

本文研究了一道求解加速度竞赛题的 5 种方法和典型变式. 解法 1 ～ 3 分别从平动参考系、平动转动参考系、转动参考系的加速度变换关系出发求解. 解法 4 从微元法入手，结合对速度瞬心的分析求解. 解法 5 建立了平面直角坐标系，对 C 点坐标计算关于时间的二阶导数并结合几何约束求解. 5 种解法虽然切入点不同，但都体现了利用杆长不变的几何约束、杆连接点速度、加速度约束关系求解的基本思路. 两个变式问题也体现了该基本思路的运用，可进一步提升学生运用相关知识解决问题的能力.

“横看成岭侧成峰，远近高低各不同”，人们看问题的出发点往往不同，常会对客观事物存在片面的认识. 一题多解的教学策略，可帮助学生开阔视野，加深理解，从不同解题思路的差异性中体会物理学的自洽之美，进而识得问题的“庐山真面目”.

参 考 文 献

[1] 吕艳坤. 一道运动学竞赛试题的多解赏析[J]. 物理教学，2020，42(7)：68－69，73.