

浅谈“球槽问题”在高中物理中的应用*

——由2023年高考湖南卷第15题引起的思考

李 兰

(湖南师范大学附属中学 湖南 长沙 410006)

(收稿日期:2023-06-14)

摘要:力学综合问题历来为各省份物理高考的重难点,其中球槽问题作为一类典型模型,频频出现在多套试卷中,从此类问题经常涉及的4个角度进行分析探讨,总结归纳,旨在引起广大高三师生在备战高考过程之中些许思考,提升学生解决实际物理问题的能力,有助于形成物理学科核心素养。

关键词:球槽模型;质量比;约束

1 引言

力学综合问题历年以来是各省份物理高考考查的重难点,往往由于涉及到多物体或者是多过程,在求解时经常需要综合运用力学三大观点,即动力学观点、能量观点以及动量观点,进而造成试题难度较大,比如“板块”问题、“连接体”问题、“斜面”问题等.在高中物理学习过程中,通过构建扎实的基础知识,充分地理解相关定理定律,进行一定量的习题训练之后,就需要提炼出一些经典物理模型,以便更加快速地解决实际的物理问题.

如图1所示,一个光滑小球在圆槽(或部分圆槽)中运动,槽与地面之间也是光滑的,即槽也可动,是物理当中常见的一类情景,这是力学综合里的常见情境,也就是我们通常所讲的球槽模型.

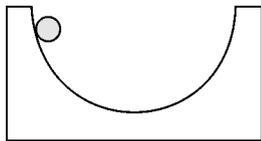


图1 光滑小球在圆槽中运动

该模型通常可以考查的角度包括:

(1)从动力学角度分析.考虑到槽被约束在水平面,小球下落过程中与槽相互作用的弹力会使得

圆槽产生水平方向的加速度,进而槽将获得水平方向的速度.在竖直方向上,小球具有加速度,系统存在着超重与失重现象,也就是说系统的总重力与地面支持力并不相等.

(2)从能量的角度分析.由于所有接触面光滑,在运动过程中,系统机械能守恒,即小球的重力势能与槽的动能、球的动能在转化过程中,总量守恒.根据上述分析,可以列出相关公式求解球或者槽的速度.

(3)从动量角度分析.由于系统水平方向所受合外力为零,遵循水平方向动量守恒,据此可求球或者是槽的最大水平位移问题,也就是“人船模型”的变式.

(4)从数学能力的角度考查.可以要求学生求解出球的运动轨迹方程.求解此类问题一般需要忽略小球的旋转,也不考虑槽的翻转.

2 典例分析

【例1】(2023年高考湖南卷第15题)如图2所示,质量为 M 的匀质凹槽放在光滑水平地面上,凹槽内有一个半椭圆形的光滑轨道,椭圆的半长轴和半短轴分别为 a 和 b ,长轴水平,短轴竖直.质量为 m

* 湖南省教育科学“十四五”规划2021年度省级一般课题“新教材背景下高中物理实验教学数字化实践研究”阶段性研究成果,课题批准号:XJK21CJC010.

的小球,初始时刻从椭圆轨道长轴的右端点由静止开始下滑.以初始时刻椭圆中心的位置为坐标原点,在竖直平面内建立固定于地面的直角坐标系 xOy ,椭圆长轴位于 x 轴上.整个过程凹槽不翻转,重力加速度为 g .

(1) 小球第一次运动到轨道最低点时,求凹槽的速度大小以及凹槽相对于初始时刻运动的距离;

(2) 在平面直角坐标系 xOy 中,求出小球运动的轨迹方程;

(3) 若 $\frac{M}{m} = \frac{b}{a-b}$,求小球下降 $h = \frac{b}{2}$ 高度时,小球相对于地面的速度大小(结果用 a, b 及 g 表示).

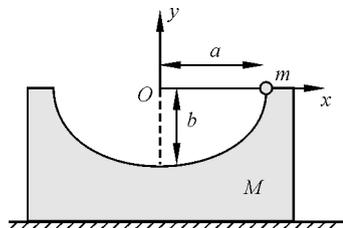


图2 例1题图

解析: (1) 小球运动到最低点的时候小球和凹槽水平方向系统动量守恒,取向左为正

$$0 = mv_1 - Mv_2 \quad (1)$$

小球运动到最低点的过程中系统机械能守恒

$$mgb = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2 \quad (2)$$

联立解得

$$v_2 = \sqrt{\frac{2m^2gb}{M^2 + Mn}} \quad (3)$$

因水平方向在任何时候都动量守恒,即

$$0 = m\bar{v}_{1x} - M\bar{v}_{2x} \quad (4)$$

两边同时乘 t 可得

$$mx_1 = Mx_2 \quad (5)$$

且由几何关系可知

$$x_1 + x_2 = a \quad (6)$$

联立解得

$$x_2 = \frac{m}{M+m}a \quad (7)$$

(2) 小球向左运动过程中凹槽向右运动,当小球的坐标为 (x, y) 时,凹槽水平向右运动的位移为 Δx ,根据上式有

$$m(a-x) = M\Delta x \quad (8)$$

则小球现在在凹槽所在的椭圆上,根据数学知识可知此时的椭圆方程

$$\frac{(x - \Delta x)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (9)$$

整理得

$$\frac{[x(M+m) - ma]^2}{M^2a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (10)$$

(3) 将 $\frac{M}{m} = \frac{b}{a-b}$ 代入小球的轨迹方程化简可得

$$[x - (a-b)]^2 + y^2 = b^2 \quad (11)$$

即此时小球的轨迹为以 $(a-b, 0)$ 为圆心, b 为半径的圆,则当小球下降的高度为 $\frac{b}{2}$ 时,轨迹如图3所示.

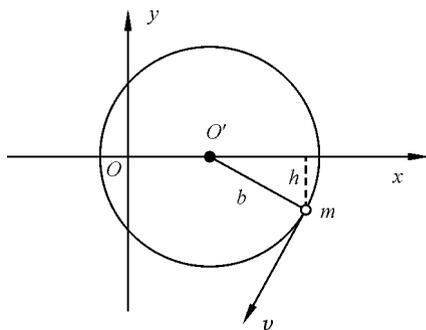


图3 小球下降的高度为 $\frac{b}{2}$ 时的状态

此时可知速度和水平方向的夹角为 60° ,小球下降 $\frac{b}{2}$ 的过程中,系统水平方向动量守恒

$$0 = mv_3 \cos 60^\circ - Mv_4 \quad (12)$$

系统机械能守恒

$$mg \frac{b}{2} = \frac{1}{2}mv_3^2 + \frac{1}{2}Mv_4^2 \quad (13)$$

联立得

$$v_3 = \sqrt{\frac{4gb^2}{a+3b}} = 2b \sqrt{\frac{g}{a+3b}} \quad (14)$$

值得注意的是,本题在设问的时候强调了不考虑槽的翻转,将平时常见的圆槽改为了椭圆槽,其实质并没有发生变化.文献[1]指出,球获得最大速率的位置与 $\frac{m}{M}$ 的比值有关,速率的极大值可能出现在最低点之前也可能出现在最低点.显然,2023年的湖南高考真题进行了规避,给出了具体的下落高度,本文也不再展开讨论.

2023年湖南卷的第15题,实则从动量角度、能量角度以及数学角度对考生进行了考查.

其实,很多考生在遇到此题时,由于考试总时间并不充裕,加之对“圆槽摆模型”^[1]可能不是特别熟练,虽能解决第(1)问,但仍有不少考生,被第(2)问的轨迹方程求解以及第(3)问对下落至 $\frac{b}{2}$ 高度时的速度求解所难倒.导致原本可以解决的物理问题,遗憾失分.

【例2】(2009年高考新课标全国卷理综第36题)两质量分别为 M_1 和 M_2 的劈A和B,高度相同,放在光滑水平面上,A和B的倾斜面都是光滑曲面,曲面下端与水平面相切,如图4所示.一质量为 m 的物块位于劈A的倾斜面上,距水平面的高度为 h .物块从静止滑下,然后滑上劈B.求物块在B上能够达到的最大高度.

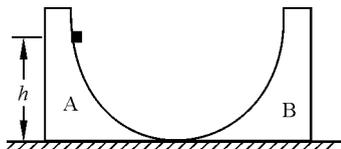


图4 例2题图

解析:设物块到达劈A的底端时,物块和A的速度大小分别为 v_1 和 v_2 ,由机械能守恒得

$$mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}M_1v_2^2 \quad (15)$$

由系统水平方向动量守恒有

$$0 = m\bar{v}_{1x} - M_1\bar{v}_{2x} \quad (16)$$

设物块在劈B上达到的最大高度为 h' ,此时物块和B的共同速度大小为 v_3 ,由机械能守恒和水平方向动量守恒得

$$mgh' + \frac{1}{2}(m + M_2)v_3^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 \quad (17)$$

$$mv_1 = (m + M_2)v_3 \quad (18)$$

联立式(15)~(18)得

$$h' = \frac{M_1M_2}{(M_1 + m)(M_2 + m)}h \quad (19)$$

可以发现,这一道高考题,前半个物理过程为水平方向上“人船模型”,即球与圆槽A相互作用的过程,分析与例1一致.后半部分,球与槽B相互作用的过程之中,由于球有水平方向初动量,应处理为类

碰撞过程.学生们在运用模型解决问题时,一定要做好模型条件的预判.

接下来,我们还是结合下面的情境,来说明与例2中第二部分相互作用过程相似的一个物理过程并探讨解决该问题的详细方法.

【例3】如图5所示,质量为 M 的滑块静止在光滑水平面上,滑块的光滑弧面底面与桌面相切,一个质量为 m 的小球以速度 v_0 向滑块滚来.若小球最终不会越过滑块,求解小球在圆弧面上升的最大高度.

分析:在这个问题中,滑块和小球水平方向动量守恒,可以处理为类碰撞模型.整个过程中系统机械能守恒(只有小球的重力势能与二者动能的相互转化),我们仍然可以列出动量和能量守恒的方程进行求解,具体的计算请读者朋友自行完成.

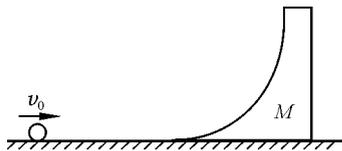


图5 例3题图

此类问题还有一些变式,如改变圆弧形状变为小车.如图6所示,带有 $\frac{1}{4}$ 光滑圆弧轨道、质量为 M 的滑车静止置于光滑水平面上.一质量为 m 的小球以速度 v_0 水平冲上滑车,当小球上行再返回,并脱离滑车时,试分析小球可能的运动形式.要解决这个问题,除了正确建立物理模型,调用“类碰撞模型”相关规律以及能量观点,还需要对 m 与 M 的大小关系进行讨论,最终得到答案.当然,圆弧轨道模型有时还会有其他变式,如在圆弧轨道之前连接一段有摩擦的水平轨道(整体仍放在光滑水平地面上),则这个附加过程类似“非弹性碰撞”问题,而且动能损失可以求解: $\Delta E_{\text{损}} = f\Delta x_{\text{相对}}$.

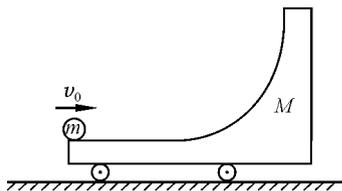


图6 小球冲上静止于光滑水平面上的滑车

3 结束语

其实关于球槽问题中涉及动力学角度是一个易

错点,文献[2]指出小球在何时获得最大速度有赖于槽和球的质量比 $\frac{M}{m}$,只有在 $\frac{M}{m} > 2.73$,即槽质量

为小球的2倍以上时,才能认为“小球在最低点有最大速率”.另外文献[1]对于小球到达圆槽的底部是否获得最大速率也展开了较为专业的讨论与演绎,小球在圆槽内运动过程中,其在最低点受到来自槽的支持力的问题,学生们可以先利用系统机械能守恒和水平方向动量守恒求得滑块运动到最低点时,两物体的速度,再以光滑半圆槽为参考系,应用牛顿第二定律求出 F_N .本文所举出的几例“球槽模型”均为高中物理学习中较为常见的情景,均作了理想化处理.学生们在解决实际问题时,应对系统水平方向上是否有初动量进行预判,将模型分为类“人船模型”或者是类“碰撞模型”,因为这将影响动量守恒观点的具体表达.若作为类碰撞模型处理时,也应特别注意槽内是粗糙还是光滑,这将影响能量守恒观点的具体表达.特别提醒,如果遇到小球过重而槽过轻,即若 $\frac{M}{m}$ 比较小,有可能导致小球在未到达最低点时,其压力已造成槽的翻转,如在前文提到的2023年高考湖南卷第15题就

已经简化模型了,在题干中设定槽不会翻转,球可以到达底部.

物理是一门基础科学,强调基本原理的探究,要求学生了解物理基本原理并加深理解.基于新课标新高考背景之下,物理试题在表述、结构、难度等方面出现了很多新变化.考生更需夯实基础,熟悉教材,理解定理定律,熟悉各种经典模板,逐步提高解题能力.作为一线物理教师,在带领学生备战高考的过程中,应注意到在核心素养层面来看,新高考试题注重学生科学思维的发散,应指导学生以正确科学的学习方法对物理学科知识及相关内容进行定性和定量研究、判断和推理,进而在充分发挥自主学习积极性的前提下,实现对物理学规律的推导和结论概括,形成物理学科核心素养^[3].

参考文献

- [1] 高建平. 对椭圆摆模型两个误区的研究 [J]. 中学物理教学参考, 2022, 51(5): 60-63.
- [2] 张燕怡. 关于力学综合常见模型“球槽问题”的一点讨论 [J]. 物理教学探讨, 2017(4): 52-53.
- [3] 张祖国. 基于高考试题的高中物理学科核心素养培养研究 [J]. 课堂内外·高中教研, 2022(7): 54-56.

Brief Discussion on the Application of “Ball-Slot Question” in High School Physics

——Reflection on the Question 15 of Hunan Volume in 2023 College Entrance Examination

LI Lan

(Hunan Normal University Affiliated Middle School, Changsha, Hunan 410006)

Abstract: The comprehensive problem of mechanics has always been a key and difficult point in the physics college entrance examination in various provinces. Among them, the ball groove problem, as a typical model, frequently appears in multiple sets of test papers. This article analyzes and discusses the four perspectives frequently involved in this type of problem, summarizes and summarizes it, aiming to stimulate some thinking among the third year teachers and students of Guangzhou University in the preparation for the college entrance examination, improve their ability to solve practical physics problems, and help form the core literacy of physics discipline.

Key words: ball-groove model; quality ratio; constraint