

二体弹性碰撞规律研究*

——以2023年高考试题为例

李开玮

(广东理工学院基础课教学研究部 广东 肇庆 526100)

张智明

(广东理工学院大学物理实验中心 广东 肇庆 526100)

刘顺彭

(广东理工学院基础课教学研究部 广东 肇庆 526100)

(收稿日期:2023-07-01)

摘要:结合弹性碰撞恢复系数、 $v-t$ 图像、质心速度等概念研究了2023年高考试题中的二体弹性碰撞问题,为学生解决弹性碰撞问题提供一些思路.

关键词:恢复系数; $v-t$ 图像;质心速度

1 引言

2023年高考不同试卷中均不约而同地考到了二体弹性碰撞的问题,可见二体弹性碰撞是力学的一个基础问题,值得考生细致研究,它涉及了初次碰撞以及之后的多次连续碰撞的情况,要求考生对动量守恒、能量守恒、 $v-t$ 图像有良好的掌握,另外还要求对多次连续碰撞中二体运动的规律进行总结.弹性碰撞具有以下特点^[1-2]:

- (1) 恢复系数等于1;
- (2) 碰撞前后速度关于系统质心速度对称;
- (3) 二体 $v-t$ 图像具有直观性.

这些特点对于求解问题有着很大的帮助,通过细致的观察总结,可以比较简洁地解决问题,让问题图像清晰化.

2 二体弹性碰撞问题

下面通过对几道高考试题的分析来讨论弹性碰撞的运动规律.

【例1】(2023年高考全国乙卷理综第25题)如图1所示,一竖直固定的长直圆管内有一质量为 M 的静止薄圆盘,圆盘与管的上端口距离为 l ,圆管长

度为 $20l$.一质量为 $m = \frac{1}{3}M$ 的小球从管的上端口由静止下落,并撞在圆盘中心,圆盘向下滑动,所受滑动摩擦力与其所受重力大小相等.小球在管内运动时与管壁不接触,圆盘始终水平,小球与圆盘发生的碰撞均为弹性碰撞且碰撞时间极短.不计空气阻力,重力加速度大小为 g .求:

- (1) 第一次碰撞后瞬间小球和圆盘的速度大小;
- (2) 在第一次碰撞到第二次碰撞之间,小球与圆盘间的最远距离;
- (3) 圆盘在管内运动过程中,小球与圆盘碰撞的次数.

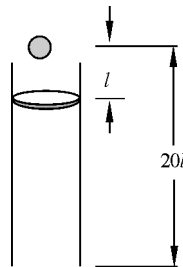


图1 例1示意图

解析:(1) 第一次碰前小球速度为 v_0 ,根据能量守恒有

* 广东理工学院质量工程项目,项目编号:SYJXZX20212;广东理工学院科技项目,项目编号:2023YBZK006.

作者简介:李开玮(1988-),男,硕士,讲师,研究方向为大学物理教学与科研.

通讯作者:刘顺彭(1988-),男,硕士,讲师,研究方向为大学物理教学与科研.

$$mgl = \frac{1}{2}mv_0^2$$

可得

$$v_0 = \sqrt{2gl}$$

设第一次碰后小球圆盘速度分别为 v_1 、 u_1 ，根据动量守恒及能量守恒可得

$$\begin{cases} mv_0 = mv_1 + Mu_1 \\ \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mu_1^2 \end{cases} \quad (1)$$

解式(1)得

$$v_1 = -\frac{1}{2}v_0 = -\frac{\sqrt{2gl}}{2}$$

$$u_1 = \frac{1}{2}v_0 = \frac{\sqrt{2gl}}{2}$$

(2) 第一次碰撞后，圆盘匀速下落，小球做自由落体运动，图2所示为小球与圆盘 $v-t$ 图像，当小球与圆盘共速时，小球与圆盘间距离最远，为图2中第一个阴影区域面积

$$S = \frac{1}{2}(u_1 - v_1) \frac{u_1 - v_1}{g} = l$$

(3) 设第 n 次 ($n \geq 2$) 碰撞前小球、圆盘速度分别为 v_{n0} 、 u_{n0} ，碰后速度分别为 v_n 、 u_n ，则根据动量、能量守恒可得

$$\begin{cases} mv_{n0} + Mu_{n0} = mv_n + Mu_n \\ \frac{1}{2}mv_{n0}^2 + \frac{1}{2}Mu_{n0}^2 = \frac{1}{2}mv_n^2 + \frac{1}{2}Mu_n^2 \end{cases} \quad (2)$$

解式(2)可得

$$v_n - u_n = -(v_{n0} - u_{n0}) \quad (3)$$

$$\begin{cases} v_n = 2 \frac{mv_{n0} + Mu_{n0}}{m+M} - v_{n0} \\ u_n = 2 \frac{mv_{n0} + Mu_{n0}}{m+M} - u_{n0} \end{cases} \quad (4)$$

由式(3)，碰撞前后，小球、圆盘速度差绝对值保持不变，即碰撞恢复系数为1，碰前小球速度大于圆盘速度，碰后圆盘速度大于小球速度。由式(1)解析可知第一次碰前小球比圆盘速度大 v_0 ，碰后，圆盘比小球速度大 v_0 ，然后圆盘做匀速运动，小球做匀加速运动，第一次碰后至第二次碰撞前，它们的位移应相等，故根据 $v-t$ 图像可知，图2中两个阴影面积应相等，因此，第二次碰撞前小球速度将比圆盘速度大 v_0 ，即小球速度增大了 $2v_0$ 。再根据式(3)，第二次碰后，圆盘速度将反过来比小球大 v_0 ，以此类推可知，每次碰前，小球比圆盘速度大 v_0 ，碰后圆盘速度

比小球大 v_0 ，且碰撞后至下一次碰撞前，小球速度增加 $2v_0$ 。

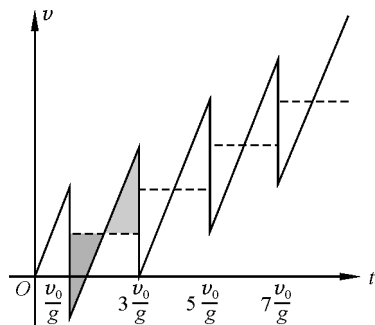


图2 小球(实线)、圆盘(虚线) $v-t$ 图像

由式(4)，小球碰撞前后速度关于系统质心速度对称，圆盘亦如是。质心速度为系统总动量除以总质量，根据上段分析，相邻两次碰撞间，仅小球速度增加 $2v_0$ ，因此系统总动量增加 $2mv_0$ 。每次碰后圆盘均做匀速运动，以圆盘为例，圆盘每次碰后速度规律为

$$\begin{cases} u_1 = 2 \frac{mv_0}{m+M} - 0 \\ u_2 = 2 \frac{mv_0 + 2mv_0}{m+M} - u_1 \\ \dots \\ u_n = 2 \frac{mv_0 + 2(n-1)mv_0}{m+M} - u_{n-1} \end{cases} \quad (5)$$

令 $k = \frac{m}{M} = \frac{1}{3}$ 解式(5)可得

$$u_n = \frac{2k}{k+1}nv_0 = \frac{n}{2}v_0 \quad (6)$$

相邻两次碰撞间隔内，小球速度增加 $2v_0$ ，故经历时间 $t = \frac{2v_0}{g}$ ，则第 n 次碰后至 $n+1$ 次碰前，圆盘下落位移为

$$h_n = u_n t = 2nl \quad (7)$$

第1次碰后至 $n+1$ 次碰前，圆盘下落总位移为

$$s_n = \sum_{i=1}^n h_i = (n^2 + n)l \quad (8)$$

因为 $s_3 < 19l < s_4$ ，故在管内运动过程中，碰撞了4次。

【例2】(2023年高考湖南卷理综第16题)如图3所示，在足够大的光滑、绝缘水平面上有两物块A和B，质量分别为 $2m$ 、 m ，其中A带电荷量为 $+q$ ，B不带电，开始时A与B相距 s_0 ，空间加有水平向右匀强电场 E ，此时物块A由静止释放，物块A、B发生弹性正碰且A电荷量不会转移，A与B均可视为质点，

重力加速度为 g 。

(1) 求物块 A 与 B 发生碰撞后瞬间物块 B 的速度大小；

(2) 两物块从第一次碰撞到第二次碰撞所用时间；

(3) 若 B 的质量为 m , A 的质量为 km , $k > 2$, A 所带电荷量为 $+kq$, 求两物块第 2 022 次碰撞后到第 2 023 次相撞的时间间隔。

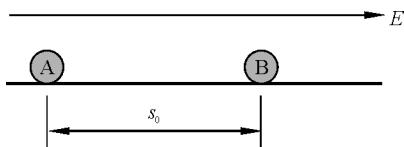


图3 例2示意图

解析: 此题与例1完全类似, 例1中小球由重力提供加速度, 此题中 A 由电场提供加速度, 另一个物体 B 做匀速运动。

(1) 第一次碰撞前 A 速度为 v_0 , 根据动能定理可得

$$qEs_0 = \frac{1}{2}(2m)v_0^2$$

解得

$$v_0 = \sqrt{\frac{qEs_0}{m}}$$

第一次碰撞时, 系统质心的速度为

$$v_{c1} = \frac{2mv_0}{2m+m} = \frac{2}{3}v_0 \quad (9)$$

设第一碰后 A、B 速度分别为 v_1 、 u_1 , 根据上文中, 碰撞前后速度关于质心速度对称的特点可得

$$\begin{cases} v_1 = 2v_{c1} - v_0 = \frac{1}{3}v_0 \\ u_1 = 2v_{c1} - 0 = \frac{4}{3}v_0 \end{cases} \quad (10)$$

因此碰后 B 速度为

$$u_1 = \frac{4}{3}v_0 = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{qEs_0}{m}}$$

(2) 第一次碰后 B 做匀速运动, A 做加速运动, 加速度为 $a = \frac{qE}{2m}$, 与例1一样, 第一次碰撞后至第二次碰撞前, A、B 位移相同, 根据图4中 A、B 的 $v-t$ 图像的面积可知, 第一次碰后 A 速度比 B 小 v_0 , 第二次碰前, A 速度比 B 大 v_0 , 故 A 速度增加了 $2v_0$, 所用时间为

$$\Delta t = \frac{2v_0}{a} = 4\sqrt{\frac{ms_0}{qE}}$$

(3) A 做加速运动时, 加速度为

$$a' = \frac{qE}{km}$$

第一次碰前 A 速度设为 v'_0 , 从初始时刻至第一次碰前, 根据动能定理有

$$qEs_0 = \frac{1}{2}kmv_0'^2$$

可得

$$v'_0 = \sqrt{\frac{2qEs_0}{km}}$$

第一次碰前, A 比 B 速度大 v'_0 , 根据弹性碰撞恢复系数等于1的特点, 可知第一次碰后 B 比 A 速度大 v'_0 , 第一次碰撞后 A 仍做加速运动, B 做匀速运动, 第一次碰后至第二次碰撞前 A、B 位移应相等, 与例1解析相似, 第二次碰前 A 比 B 速度大 v'_0 , 以此类推, 每次碰撞前 A 比 B 速度大 v'_0 , 碰后 B 比 A 速度大 v'_0 , 相邻两次碰撞间隔时间内, A 速度增加了 $2v'_0$, 故 2 022 次碰撞后到 2 023 次碰撞时间间隔为

$$t' = \frac{2v'_0}{a'} = 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{km s_0}{qE}}$$

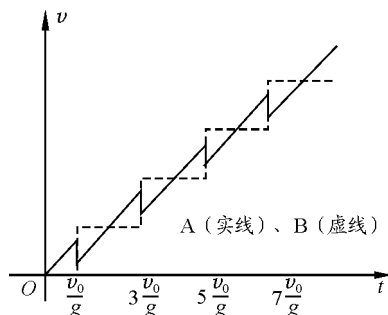


图4 $v-t$ 图像

3 结束语

以上两题均考查了多次连续碰撞问题, 在解决问题中对规律的把握非常关键: (1) 根据恢复系数为1, 以及相邻两次碰撞, 二体位移相同, 可以得到每次碰撞前后二体速度之差绝对值保持不变, 相邻两次碰撞之间时间间隔相等; (2) 再根据碰撞前后速度关于质心速度对称, 可以比较简单地求解出二体的速度表达式。

参考文献

- [1] 李开玮. 从大学与中学衔接的角度赏析高考题——以2022年全国乙卷第25题为例[J]. 高中数理化, 2023(8): 24-26.
- [2] 郑金. 关于弹性碰撞的一个普遍结论及其应用[J]. 物理通报, 2023(2): 72-75.