小球沿半圆轨道下滑速率的极值条件深度分析

王良翼
（四川省成都市树德中学 四川 成都 610031）
张 勇
（成都市锦江区嘉祥外国语高级中学 四川 成都 610023）
侯 睿
（达州市第一中学校 四川 达州 635000）
郑翔文 张琬鳞
（四川省成都市树德中学 四川 成都 610031）

（收稿日期：2023－08－11）

摘 要：对小球沿着半圆轨道下滑模型进行研究，半圆轨道与小球质量之比满足一定条件，小球的最大速率出现在最低点，否则小球的最大速率出现在达到最低点之前. 通过严格的数学分析，得出小球最大速率出现在不同位置所对应的条件.

关键词：小球；半圆轨道；最大速率

1 问题描述

【问题】如图1所示，半圆轨道质量为M，半径为R，内壁光滑并放于光滑水平面，小球的质量为m，可视为质点，从半圆轨道顶端静止释放，如果固定光滑半圆轨道，小球在下滑过程中，运动到最低点时，小球速率最大. 如果不固定光滑半圆轨道，小球下滑的最大速率的位置是否在半圆轨道最低点？

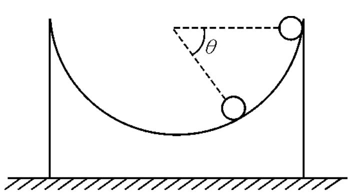

图1 小球与半圆轨道模型

很多学生在处理此问题时，认为不管轨道固定与不固定，小球运动到半圆轨道最低点时，小球的速率最大. 如果不固定光滑半圆轨道，文献[1]对此问题进行了较为深入的研究，同时文献[2]也对此问题做了研究，两位作者在文章中一致认为：当半圆轨道质量和小球质量之比$\dfrac{M}{m}<1+\sqrt{3}$时，小球运动到半圆轨道最低点前的某一位置时，小球的速率最大；当半圆轨道质量和小球质量之比$\dfrac{M}{m}>1+\sqrt{3}$时，小球运动到半圆轨道最低点时，小球的速率最大.

2 提出问题

文献[1]和文献[2]结论是一样的，当半圆轨道质量和小球质量之比$\dfrac{M}{m}<1+\sqrt{3}$时，小球运动到半圆轨道最低点前的某一位置，小球的速率最大. 但是这种情况的极限是，$M \ll m$，即$\dfrac{M}{m}\rightarrow 0$，半圆轨道可以视为轻质物体，半圆轨道与小球之间的作用力为零，所以小球只受重力，做自由落体运动，小球的最

作者简介：王良翼（1986－ ），男，硕士，中教高级，主要从事高中物理教学和物理竞赛方面的研究.

大速率出现在半圆轨道的最低点. 文献[1] 和文献[2] 中都没有对这种极限情况说明,文献[1] 利用不等式的放缩方式处理,没有得到$\frac{M}{m}\to 0$的情况,文献[2] 利用数学推导过程中,忽略零根的存在,所以也没有得到$\frac{M}{m}\to 0$的情况. 下面我们重新分析此问题,并得出$\frac{M}{m}\to 0$时,小球的最大速率出现在半圆轨道的最低点.

3　解决问题

不固定半圆轨道,小球在半圆轨道中下滑,相对半圆轨道转过角度θ时,半圆轨道的速率为v_M,小球相对半圆轨道的速率为v_{mR},由系统水平方向动量守恒定律得

$$Mv_M = m(v_{mR}\sin\theta - v_M) \tag{1}$$

由系统机械能守恒定律得

$$mgR\sin\theta = \frac{1}{2}Mv_M^2 + \frac{1}{2}m[v_{mR}^2\cos^2\theta + (v_{mR}\sin\theta - v_M)^2] \tag{2}$$

联立方程式(1) 和(2) 解得

$$v_{mR} = \sqrt{\frac{2(M+m)gR\sin\theta}{M+m\cos^2\theta}} \tag{3}$$

$$v_M = \frac{m\sin\theta}{M+m}\sqrt{\frac{2(M+m)gR\sin\theta}{M+m\cos^2\theta}} \tag{4}$$

根据速度的合成法可得小球对地的速率

$$v_m = \sqrt{v_{mR}^2\cos^2\theta + (v_{mR}\sin\theta - v_M)^2} = \sqrt{\frac{2gR\sin\theta(M^2+m^2\cos^2\theta+2Mm\cos^2\theta)}{(M+m)(M+m\cos^2\theta)}} \tag{5}$$

从式(5) 中可以看出,$M\ll m$时,即$\frac{M}{m}\to 0$,$v_m = \sqrt{2gR\sin\theta}$,当$\theta=\frac{\pi}{2}$时,$v_m$的最大值为$\sqrt{2gR}$,即小球运动到半圆轨道最低点时,小球的速率最大. 下面严格利用数学方法求出,当$\frac{M}{m}\to 0$时,小球达到最低点取得最大速率.

为了讨论方便,令$\frac{M}{m}=k$,代入式(5),并将式(5)两边平方得

$$v_m^2 = \frac{2gR\sin\theta[k^2+(2k+1)\cos^2\theta]}{(k+1)(k+\cos^2\theta)} \tag{6}$$

设$x=\sin\theta$,$x\in[0,1]$,代入式(6),整理得

$$v_m^2 = \frac{2gR[(k+1)^2x-(2k+1)x^3]}{(k+1-x^2)(k+1)} \tag{7}$$

为讨论小球速率v_m的最值问题,下面构建新的函数

$$y = \frac{v_m^2}{2gR} = \frac{(k+1)^2x-(2k+1)x^3}{(k+1)(k+1-x^2)} \tag{8}$$

从式(8) 可以看出,y取得最大值,v_m^2取得最大值,v_m也取得最大值. 下面我们讨论y取最大值的条件. 利用数学求导

$$\frac{dy}{dx} = 0 \tag{9}$$

将式(8) 带入式(9),求导后整理得到x的一元四次方程

$$(2k+1)x^4 - (k+1)(5k+2)x^2 + (k+1)^3 = 0 \tag{10}$$

利用求根公式求x^2得

$$x^2 = \frac{k+1}{4k+2}[(5k+2)\pm\sqrt{k(17k+8)}] \tag{11}$$

由于$x=\sin\theta$,所以$x^2=\sin^2\theta\leqslant 1$,式(10) 的解为

$$x^2 = \sin^2\theta = \frac{k+1}{4k+2}\cdot[(5k+2)-\sqrt{k(17k+8)}] \tag{12}$$

由式(12) 可知,如果$x=\sin\theta=1$,$\theta=\frac{\pi}{2}$,y取得最大值,小球达到最低点取得最大速率;如果$x=\sin\theta<1$,$\theta<\frac{\pi}{2}$,y取得最大值,即小球运动到半圆轨道最低点前的某一位置,小球的速率最大.

下面讨论$x=\sin\theta<1$时,k的取值范围为

$$x^2 = \sin^2\theta = \frac{k+1}{4k+2}\cdot[(5k+2)-\sqrt{k(17k+8)}] < 1 \tag{13}$$

式(13) 中分母不为零,所以$k\neq -\frac{1}{2}$,将式(13) 两边同时乘以$4k+2$得

$$(k+1)[(5k+2)-\sqrt{k(17k+8)}] < 4k+2 \tag{14}$$

将式(14) 左边展开得

$$5k^2+7k+2-(k+1)\sqrt{k(17k+8)}<4k+2 \tag{15}$$

将式(15) 根式移到右边得

$$5k^2+3k<(k+1)\sqrt{k(17k+8)} \tag{16}$$

将式(16) 两边平方得

$$25k^4+30k^3+9k^2<17k^4+42k^3+33k^2+8k \tag{17}$$

整理不等式(17) 得

$$2k^4-3k^3-6k^2-2k<0 \tag{18}$$

不等式(18) 因式分解得

$$k(k+\frac{1}{2})(k-\sqrt{3}-1)(k+\sqrt{3}-1)<0 \tag{19}$$

不等式(19) 对应的等式为

$$k(k+\frac{1}{2})(k-\sqrt{3}-1)(k+\sqrt{3}-1)=0 \tag{20}$$

等式(20) 的解为

$$k_1=\sqrt{3}+1 \qquad k_2=0$$
$$k_3=-\sqrt{3}+1 \qquad k_4=-\frac{1}{2} \tag{21}$$

$k_4=-\frac{1}{2}$ 是增根,应舍去,同时由于$\frac{M}{m}=k$,k 不能为负值,所以不等式(13) 的解集为

$$0<k<\sqrt{3}+1 \tag{22}$$

文献[1] 和文献[2] 都没有对 $k=\frac{M}{m}=0$ 讨论,从而出现讨论的不完善.下面我们把结论完善:

(1)$k=0$ 及 $k=\sqrt{3}+1$,$x^2=\sin^2\theta=1$,$\theta=\frac{\pi}{2}$,小球达到最低点时,速率达到最大.

(2)$0<k<\sqrt{3}+1$,$x^2=\sin^2\theta<1$,$\theta<\frac{\pi}{2}$,小球运动到半圆轨道最低点前的某一位置,小球的速率最大.

(3)$k>\sqrt{3}+1$,$x^2=\sin^2\theta>1$,但是由于 $x^2=\sin^2\theta$ 的最大值为1,所以 $x^2=\sin^2\theta$ 取1,即 $\theta=\frac{\pi}{2}$,于是小球达到最低点时,速率达到最大.

4　结束语

本文利用极限法发现问题,并通过严格的数学证明求出 $k=\frac{M}{m}=0$ 时,小球的最大速率出现在最低点位置.以后在研究物理问题中的数学表达式时,尤其类似式(13),应该把所有根求解出来,不然很容易漏掉零根.本文的讨论结果,为小球沿半圆轨道下滑速率在何处取最大的命题提供理论依据.

参 考 文 献

[1] 周起.摆球模型中质量比临界值的存在及推导[J].物理教学,2023(4):46-52.

[2] 郑金.探究小球沿半圆轨道下滑速度的极值条件[J].物理教师,2015(12):63-64.

(上接第 114 页)

并完成了编程,之后在课堂上向他们展示轨迹图.学生们对这张漂亮的轨迹图表现出了极大的好奇心.之后,有学生学习了 MATLAB 编程,尝试用它去解决其他的一些物理问题,也有学生由此对微积分产生了兴趣,选修了学校的“物理中的微积分”这一课程.

我们希望培养的是有想法、有主动学习能力的学生.当学生提出各种问题的时候,如果教师能够尽自己的能力去回答这些问题,那么就能做出榜样,引导学生深入思考,提出更多的问题,学生也会学着教师尝试去解决这些实际问题,这样的学生才真正具备物理核心素养.高中物理中,微元累加,极限思想是核心物理思想之一,高中阶段学生提出的不少问题究其根本就是对这个思想的理解.对微元过程的可视化处理可以很好地回答这类问题,有助于提升学生的学习兴趣,激发求知欲和创造能力.

参 考 文 献

[1] 张岳.MATLAB 程序设计与应用基础教程[M].北京:清华大学出版社,2011:55.

[2] 俞罕卿,钱卓琳,朱国强.猎犬追狐狸问题的求解与 MATLAB 模拟[J].物理教学,2020(3):63-65.

[3] 黄志豪.一道基于镜像法对电场的严格求解问题[J].物理教师,2018(12):69-70.