短文荟萃与物理教学漫谈

用求导法解决极值问题

郝　详
（河北保定外国语学校　河北 保定　071000）

（收稿日期：2023－08－16）

摘　要：例析用三角函数法和二次三项式性质法（配方法）解极值问题的缺点，介绍了用求导法解决物理极值问题的优势.

关键词：求导法；极值；三角函数法；配方法

极值问题在物理教学中经常出现，根据物理规律，找到物理量之间的关系，利用数学知识求解极值，是摆在每个物理教师面前的问题.

在求解极值问题时，最长用的方法是三角函数法（在 2022 年 1 月浙江省普通高校招生选考科目考试物理试题第 5 题用到）和二次三项式性质法（配方法，比如 2012 年普通高等学校招生全国统一考试浙江理综物理卷第 5 题用到）. 但是，这两种方法对有的题目效果并不好，比如下面的例题.

【例 1】如图 1 所示，光滑小球 a、b 的质量均为 m，a、b 均可视为质点，a、b 用刚性轻杆连接，竖直地紧靠光滑墙壁放置，轻杆长为 l，b 位于光滑水平地面上，a、b 处于静止状态，重力加速度大小为 g. 现对 b 施加轻微扰动，使 b 开始沿水平面向右做直线运动，问：直到 a 着地的过程中，何时 b 的速度最大？

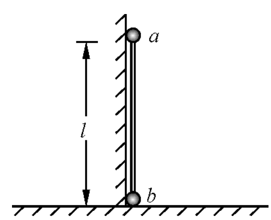

图 1　例 1 题图

分析：对 b 施加轻微扰动使 b 开始沿水平面向右做直线运动，杆被压缩，对 a 和 b 均为推力，杆对 a 做负功，杆对 b 做正功，当杆的推力等于零时，杆对 b 做正功最多，此时 b 的速度最大，设杆与水平方向的夹角为 θ，对系统由机械能守恒有

练学生思维的灵活性.

如新粤教版万有引力定律、机械能守恒及其定律中的例题，都有采用“一题多解” 的模式，为学生解题提供了不同思路. 又如新粤教版生活与生产中的抛体运动的例题，在例题原本平抛运动的物理情境的基础上，引导学生思考若运动方式变成斜抛运动该如何解题，帮助学生进行知识迁移. 因此教师在讲解课堂例题时，可以基于例题原有题干进行变式训练，做到“一题多变”，有效培养学生的思维能力.

4　结束语

教材中精心编写的例题蕴含了丰富的育人素材，不同版本的教材例题虽然在编写特点上各有特色，但归根结底都以培养学生的物理学科核心素养为目的. 因此，在教学中应当最大限度体现例题的示范作用，发挥例题的育人功能，促进学生物理学科核心素养的发展.

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中物理课程标准（2017 年版 2020 年修订）[S]. 北京：人民教育出版社，2018.
[2] 邓沛恩，程敏熙. 3 版本物理教材例题的对比与分析 —— 以动能定理为例[J]. 物理通报，2020(12)：122－125.
[3] 王菊香. 从教材例题编写变化谈物理学科核心素养的培育 —— 以人教版高中物理新教材为例[J]. 物理教学探讨，2021，39(1)：19－22.
[4] 陈宏林，邓晓敏. 认知负荷理论对“高中物理习题泛图象表征方法” 的启示[J]. 物理教学，2016，38(2)：19－21.

$$mg(l-l\sin\theta)=\frac{1}{2}mv_a^2+\frac{1}{2}mv_b^2$$

沿着杆的速度相等,有

$$v_a\sin\theta=v_b\cos\theta$$

联立解得

$$E_{kb}=\frac{1}{2}mv_b^2=mgl(1-\sin\theta)\sin^2\theta$$

即

$$E_{kb}=mgl(1-\sin\theta)\sin^2\theta$$

通过观察发现,动能E_{kb} 是关于θ 的函数,而且是高次函数,所以用三角函数的方法有些困难. 现在作函数的 $y-\theta$ 图像,如图 2 所示.

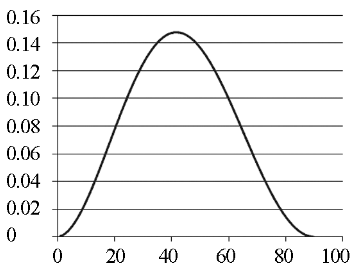

图 2　$y=(1-\sin\theta)\sin\alpha\sin\alpha$ 函数图像

通过图线发现,函数的最大值在 42° 左右,并不是一个特殊值,这就需要用到费马定理. 由于高中阶段对此介绍是通过例题出现的,在此简单介绍一下.

费马定理这样表述:若函数 $f(x)$ 在 x_0 点有导数,并且在 x_0 的某邻域内恒有 $f(x)\leqslant f(x_0)[f(x)\geqslant f(x_0)]$ 成立,则 $f'(x_0)=0$[1]. 费马定理的几何意义是:如果 $f(x)$ 在 x_0 的值不小于临近的函数值[或 $f(x_0)$ 不大于临近的函数值],只要在$[x_0, f(x_0)]$点曲线有切线,其切线必为水平. 函数在 x_0 处的切线水平,意味着函数在此处存在极值(函数的一阶导数等于零).

例题解法:设

$$y=mgl(1-\sin\theta)\sin^2\theta$$

对其求导,有

$$y'=2mgl\sin\theta\cos\theta(2-3\sin\theta)$$

令 $y'=0$,则有 $2-3\sin\theta=0$,即 $\sin\theta=\dfrac{2}{3}$ 时动能取得最大值,也就是说,$\sin\theta=\dfrac{2}{3}$ 时,b 的速度最大.

求导法不但可以解决三角函数的极值问题,也可以解决二次函数的极值问题.

【例 2】(2017 年高考全国 Ⅱ 卷第 17 题)如图 3 所示,半圆形光滑轨道固定在水平地面上,半圆的直径与地面垂直,一小物块以速度 v 从轨道下端滑入轨道,并从轨道上端水平飞出,小物块落地点到轨道下端的距离与轨道半径有关,此距离最大时,对应的轨道半径为(重力加速度为 g)(　　)

A. $\dfrac{v^2}{16g}$　　B. $\dfrac{v^2}{8g}$　　C. $\dfrac{v^2}{4g}$　　D. $\dfrac{v^2}{2g}$

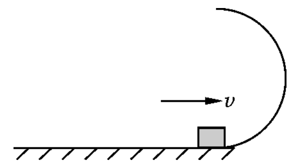

图 3　例 2 题图

分析:设小物块运动到最高点的速度为 v_t,半圆形光滑轨道半径为 R,小物块由最低点运动到最高点,由机械能守恒定律,有

$$\frac{1}{2}mv_t^2-\frac{1}{2}mv^2=-mg\cdot 2R$$

小物块从最高点飞出做平抛运动,则

$$x=v_tt\qquad 2R=\frac{1}{2}gt^2$$

联立解得

$$x=2\sqrt{\frac{v^2}{g}R-4R^2}$$

根式下面是一个关于 R 的二次函数,令

$$y=\frac{v^2}{g}R-4R^2$$

则 $y'=\dfrac{v^2}{g}+8R=0$ 时函数取得极值,此时

$$R=\frac{v^2}{8g}$$

即当 $R=\dfrac{v^2}{8g}$ 时,x 最大,选项 B 正确.

用这种方法比判别式方法求二次函数极值简单高效.

通过以上例题可以看出,在求极值问题上,求导法是难得的好方法.

参 考 文 献

[1] 四川大学数学系高等数学教研室. 高等数学[M]. 北京:高等教育出版社,1993.

[2] 李龙才,周远方. 高中数学选择性必修二[M]. 北京:人民教育出版社,2019:84.