

人船模型背后的微元法应用*

——一道高考题引发的思考

杨学切

(福建省厦门第一中学 福建 厦门 361003)

(收稿日期:2023-08-27)

摘要:2022年高考全国理综乙卷第25题的第(2)问考查了微元法“化变速为匀速”的思想,求出物体变加速运动的位移大小,其方法也就是熟知的“人船模型”中的物理方法.人船模型教学上应突出其背后的微元法,才能使得学生能够在新情境中,灵活地迁移运用.最后,文章还提出了微元法教学应遵循螺旋式深化的原则.

关键词:微元法;人船模型;应用

1 高考题引发对“人船模型”教学的思考

最早出现微元法的高考题可以追溯到2013年高考全国课标I卷第25题“含电容器的电磁感应问题”,但此题可以避免微元法,直接运用 $i = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ 和 $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ 替换求解.因此,中学教师未能意识到“微元法”在解决一些物理问题中的重要性.

时隔3年,2016年高考全国课标I卷第35题第(2)小题,需要取足够短时间 Δt 内的“喷泉的水柱质量”作为研究对象进行分析,出现了研究对象为“流体类”的问题,需要运用微元法和动量定理解决问题.自此开始,国家命题和各省自主命题的高考试题中,出现微元法解决问题变为家常便饭,微元法也成为考生必需要掌握的物理方法之一.

又时隔6年,2022年高考全国理综乙卷第25题,再次考查了微元法.

【例题】如图1中(a)所示,一质量为 m 的物块A与轻质弹簧连接,静止在光滑水平面上,物块B向A运动, $t=0$ 时与弹簧接触,到 $t=2t_0$ 时与弹簧分离,第一次碰撞结束,A、B的 $v-t$ 图像如图1中的(b)所示.已知从 $t=0$ 到 $t=t_0$ 时间内,物块A运动的距离为 $0.36v_0t_0$. A、B分离后,A滑上粗糙斜面($\mu=0.45$),然后滑下,与一直在水平面上运动的B再次碰撞,斜面倾角为 θ ($\sin\theta=0.6$),与水平面光滑连

接.碰撞过程中弹簧始终处于弹性限度内,求:

(1)第一次碰撞过程中,弹簧弹性势能的最大值;(过程略,答案: $E_{p\max}=0.6mv_0^2$)

(2)第一次碰撞过程中,弹簧压缩量的最大值;

(3)第一次碰撞后A滑上粗糙斜面,然后滑下,与一直在水平面上运动的B第二次碰撞后A、B的速度分别为多少?(过程略,答案: $v_A''=2v_0, v_B''=0.2v_0$)

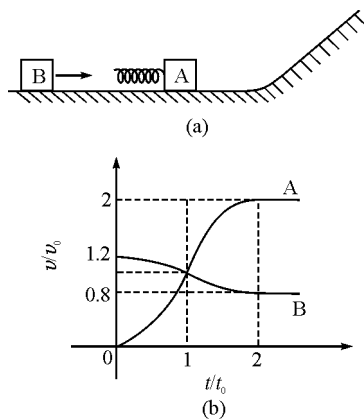


图1 例题题图

本题第(2)小题,需要运用微元法解决问题.

解:B接触弹簧后,压缩弹簧的过程中,A、B动量守恒

$$m_B \times 1.2v_0 = m_B v_B + m v_A$$

由第(1)问可知 $m_B = 5m$,可得

$$6mv_0 = 5mv_B + m v_A$$

对方程两边同时乘以足够短时间 Δt ,再求

* 福建省中青年教育科研项目(基础教育研究专项)“基于物理方法的高三物理导优作业的设计研究”,项目编号:JSZJ22026(福建教育学院资助);福建省教育科学“十四五”规划2022年度专项课题“基于物理方法的高考导优案例研究”,立项批准号:Fjxczx22-337.

和,有

$$\sum 6mv_0 \Delta t = \sum 5mv_B \Delta t + \sum mv_A \Delta t$$

$0 \sim t_0$ 之间,据位移等于速度在时间上的累积,可得

$$6mv_0 t_0 = 5ms_B + ms_A$$

将 $s_A = 0.36v_0 t_0$

代入可得 $s_B = 1.128v_0 t_0$

则第一次碰撞过程中,弹簧压缩量的最大值

$$\Delta s = s_B - s_A = 0.768v_0 t_0$$

【教学反思】本小题突出微元法的考查,很好地体现了“反套路”“反刷题”的命题新理念. 本题显然是要从动量的视角解决问题,中学阶段运用动量的视角解决问题中,“人船模型”是唯一能求解位移的方法,但本题又不符合“人船模型”总动量为零的特点,使得学生陷入迷茫. 若教学中有透彻分析“人船模型”背后的微元法,使学生理解微元法的科学思维. 学生一定能将微元法迁移运用到本题,也就不会感到不知所措.

2 比较人船模型的 3 种教学方式

“人船模型”得出人和船的位移只与人和船的质量有关,与运动情况无关. “人船模型”适用的条件为:一个原来处于静止状态的系统,且在系统发生相对运动的过程中,至少有一个方向(如水平方向或者竖直方向)动量守恒. “人船模型”不仅是动量守恒问题中典型的物理模型,对其变形的研究,将影响一类力学过程的分析思路,通过类比和等效方法,可以使问题的分析思路和解答变得简捷. 模型题如下.

【模型题】如图 2 所示,质量为 M 的船停在静止的水面上,船长为 L ,一质量为 m 的人,由船头走到船尾,若不计水的阻力,则整个过程人相对于水面移动的距离为 _____,船相对于水面移动的距离为 _____



图 2 人船模型

2.1 教学方式一 稀里糊涂结论型

画出人和船的运动示意图,如图 3 所示.

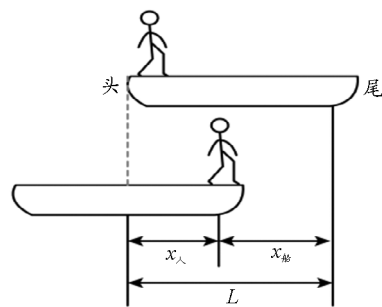


图 3 人和船的运动示意图

船和人组成的系统,在水平方向上动量守恒,人在船上行进,船向后退,规定人速度方向为正方向,有

$$mv_1 - Mv_2 = 0 \quad (1)$$

人从船头走到船尾,设船后退的距离为 $x_{船}$,则有

$$x_{船} = v_2 t \quad (2)$$

设人相对于水面移动的距离为 $x_{人}$,则有

$$x_{人} = v_1 t \quad (3)$$

由几何关系得

$$x_{船} + x_{人} = L \quad (4)$$

由(1)~(3)解得

$$m x_{人} = M x_{船} \quad (5)$$

由式(4)和式(5)解得

$$x_{人} = \frac{ML}{m+M}$$

$$x_{船} = \frac{mL}{m+M}$$

【教学反思】人和船不是匀速直线运动,教学中稀里糊涂的默认为匀速直线运动,得出正确的结果,容易让学生产生质疑,推理论证过程也有失科学性. 在实际教学中,教师虽意识到不妥,但往往告知学生:这里仅做简化处理,实际上人与船是做变速运动,但这个结论仍是正确的,同学们要记住 $m x_{人} = M x_{船}$ 这个结论.

2.2 教学方式二 平均速度糊弄型

画出人和船的运动示意图,如图 3 所示.

船和人组成的系统,在水平方向上动量守恒,人在船上行进,船向后退,规定人速度方向为正方向,有

$$mv_1 - Mv_2 = 0$$

移项得

$$mv_1 = Mv_2 \quad (6)$$

由式(6)可知,人和船瞬时速度大小之比与它们的质量成反比,且每时每刻、自始至终都如此,则它们的平均速度大小之比,也是与它们的质量成反比,因此,有

$$m\bar{v}_1 = M\bar{v}_2 \quad (7)$$

人从船头走到船尾,设船后退的距离为 $x_{\text{船}}$,则有

$$x_{\text{船}} = \bar{v}_2 t \quad (8)$$

设人相对于水面移动的距离为 $x_{\text{人}}$,则有

$$x_{\text{人}} = \bar{v}_1 t \quad (9)$$

由几何关系得

$$x_{\text{船}} + x_{\text{人}} = L \quad (10)$$

由式(8)~(10)解得

$$m x_{\text{人}} = M x_{\text{船}} \quad (11)$$

由式(10)和(11)解得

$$x_{\text{人}} = \frac{ML}{m+M}$$

$$x_{\text{船}} = \frac{mL}{m+M}$$

【教学反思】人和船做变加速直线运动,教师指出人和船的瞬时速度大小之比与它们的质量成反比,则它们的平均速度大小之比也与它们的质量成反比,这样推理论证过程似乎无可反驳,但掩盖了人船模型背后重要的物理方法——微元法.导致学生仍然是仅仅记住结论 $m x_{\text{人}} = M x_{\text{船}}$,不能在新情境中运用和解决问题.

2.3 教学方式三 方法通透精析型

画出人和船的运动示意图,如图3所示.

船和人组成的系统,在水平方向上动量守恒,人在船上行进,船向后退,规定人速度方向为正方向,有

$$mv_1 - Mv_2 = 0$$

移项得

$$mv_1 = Mv_2 \quad (12)$$

取足够短时间 Δt 由式(12)可得

$$mv_1 \Delta t = M v_2 \Delta t \quad (13)$$

式子两边同时求和,可得

$$\sum mv_1 \Delta t = \sum M v_2 \Delta t \quad (14)$$

人从船头走到船尾,设船后退的距离为 $x_{\text{船}}$,则有

$$x_{\text{船}} = \sum v_2 \Delta t \quad (15)$$

设人相对于地面的距离为 $x_{\text{人}}$,则有

$$x_{\text{人}} = \sum v_1 \Delta t \quad (16)$$

由几何关系得

$$x_{\text{船}} + x_{\text{人}} = L \quad (17)$$

由式(14)~(16)解得

$$m x_{\text{人}} = M x_{\text{船}} \quad (18)$$

由式(17)~(18)解得

$$x_{\text{人}} = \frac{ML}{m+M} \quad x_{\text{船}} = \frac{mL}{m+M}$$

【教学反思】推理论证过程尊重船和人做变加速直线运动的事实,利用微元法“化变速为匀速”的科学思维得出正确的结果,推理过程科学性强,逻辑严密,呈现了微元法“化变为恒”的思想.有助于学生通透理解人船模型的结论,也理解解决问题过程的物理方法,通过一定的变式训练,将方法迁移应用,提升在新情境中解决物理问题的能力.

3 微元法的螺旋式深化教学原则

微元法的教学不是一蹴而就,在高中物理教学中应该遵循螺旋式深化的教学原则,从隐性渗透,到显性运用,逐步提升学生对微元法的科学思维认知和运用.

3.1 教材对微元法的处理

以山东科学技术出版社的新教材《普通高中物理教科书》为例.

第一,必修一教材中^[1],瞬时速度概念的教学——学生初次接触极限思想,为微元法做好微分思想的铺垫,如图4所示.

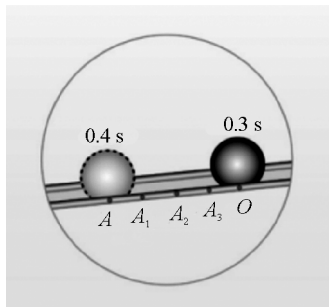


图4 瞬时速度的理解

第二,必修一教材中,匀变速直线运动的位移公式推导——在“方法点拨”明确提出了“推导中用到了微积分的思想,即无限分割微元求和、逐渐逼近真实状况的思想”,让学生初步体会到微元法“化变速为匀速”的魅力,如图5所示.

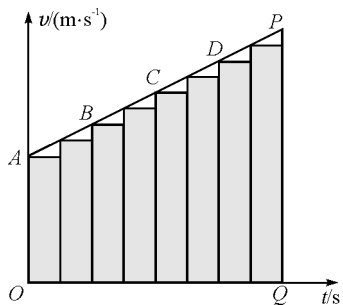


图5 图像法推导位移公式

第三,必修二教材中^[1],用图像法描述变力做功的大小.进一步学习微元法,从“化变速为匀速”到“化变力为恒力”,在新情境中迁移应用微元法,如图6所示.

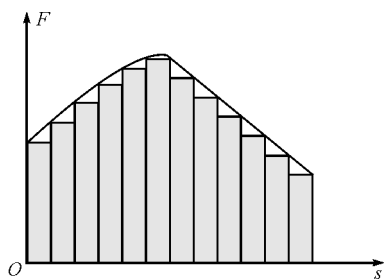


图6 图像法描述变力做功

第四,必修二教材中,如图7所示,分析重力做功与路径无关,只与高度差有关的教学——深化感悟微元法“化变为恒”“化曲为直”科学思维的精髓所在.必修三教材中,如图8所示,静电力做功与路径无关,只与初末位置有关的教学——进一步巩固微元法的思想.

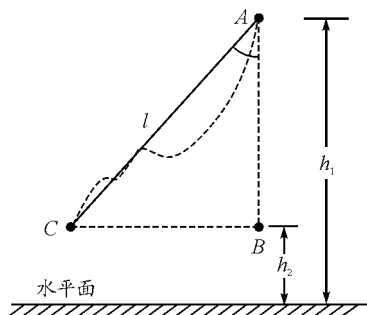


图7 重力做功与路径无关

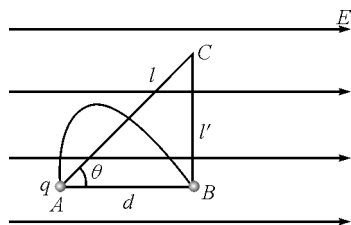


图8 静电力做功与路径无关

3.2 微元法在解决问题中的应用

第一,必修三中“静电场”学习之后,对带电体周围的电场强度的求解,利用“线微元”“面微元”达成解决非点电荷的电场强度的叠加问题,如2014年高考江苏卷第4题,也是高中学生利用微元法解决物理问题的真正开始.

第二,选择性必修一中“动量”学习之后,动量定理结合微元法,解决流体类问题是微元法解决物理问题的再度深化和迁移应用.如2021年高考福建卷第4题,2022年高考福建卷第8题,等等.

第三,选择性必修二的“电磁感应”学习之后,利用微元法解决电磁感应中位移、速度、电荷量、时间等问题,是微元法的综合运用,如2022年高考福建卷第15题,2023年高考福建卷第4题,等等.

利用微元法解决问题要求学生对微元法思想有透彻的理解,并且表达规范.可以对应用微元法解决物理问题做个归纳,如图9所示.

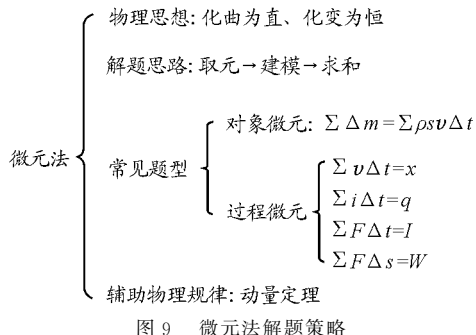


图9 微元法解题策略

4 结束语

微元法的教学不是一蹴而就,从新课教学中的循序渐进隐性渗透,到解决问题中显性地融合贯通,最终达成灵活地在新情境、复杂情境中迁移应用.教材中对各种物理方法的处理,教师需要宏观上去纵向把握,微观上递进式落实到教学的各个阶段,才能使得学生“不仅知其然,而且知其所以然”,最终提升学生的科学思维素养,实现从解题到解决问题的转变.

参考文献

[1] 廖伯琴. 普通高中教科书物理必修第一册[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 2019.
 [2] 廖伯琴. 普通高中教科书物理必修第二册[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 2019.
 [3] 杨学切. 有效破题——决胜高考的6中物理方法[M]. 福州: 福建教育出版社, 2019.