

基于 Mathematica 软件分析受约束多体运动问题

郭龙飞 姚宏林 宋铁岭 李柏力 吴昊

(中国人民解放军军事航天部队航天工程大学基础部 北京 101400)

(收稿日期:2023-09-05)

摘要:受约束的多体运动涉及质点运动学、动力学和守恒定律等多方面知识点的综合运用,是大学物理学中比较难的一类问题.本文研究了一个典型的受约束多体运动案例,由两个轻质刚体细杆连接的3个小球.在给定初始条件后,从守恒定律的角度出发,并给予约束方程,利用 Mathematica 软件强大的符号运算和解方程能力对此类问题进行求解,得到系统运动的详细过程,包括质点的位置坐标、速度、加速度等物理量随时间的变化,并将其可视化.此外,还讨论了初始条件的改变对运动过程的影响.利用 Mathematica 软件求解此类问题使学生摆脱繁琐数学的束缚,将更多精力关注在物理知识和概念上的理解,提高学习的效率.

关键词: Mathematica; 约束; 多体运动

1 引言

大学物理是高等院校所有理工科类专业的一门必修基础课程,对培养大学生的科学思维和逻辑推理能力有着至关重要的作用.受约束多体运动是大学物理学中一类经典的综合性问题,涉及质点运动学、动力学和守恒定律等多个方面的物理知识^[1-3].这类问题的研究对象是由两个或两个以上的质点组成的系统.这些质点往往受到轻绳、轻质细杆、弹簧等束缚,不能自由的运动.

本文基于 Mathematica 软件对一典型受约束多体运动案例进行了讨论^[4-7].针对该问题,我们从系统的能量和动量守恒出发,借助 Mathematica 软件的符号运算和计算能力^[8-9],得到了各质点的运动特征,包括运动轨迹、速度、加速度等物理量.这使我们可以详细地了解整个系统的运动过程.对于大学的开始阶段,物理中需要的数学知识,往往滞后一些.由于数学的限制,本文得不到全部物理量的解析方程,其中一部分是利用 Mathematica 得到的数值解.这样就避免了因数学因素的限制,进而将更多的精力关注在物理上.这对于刚进入大学,对高等数学等数学工具掌握不熟练的大学生在提升大学物理的学习效率方面大有帮助.

2 受约束多体运动

【案例】如图1所示,两根长 l 的刚性细杆,一端用质量为 m 的球形铰链相连,另一端分别安装质量为 m 和 $2m$ 的小球.开始时两杆并拢,铰链球朝上,竖直放置在光滑桌面上.从静止释放,两球开始向两边滑动,两杆始终保持在同一铅垂面内,那么运动过程中3个球的运动如何?

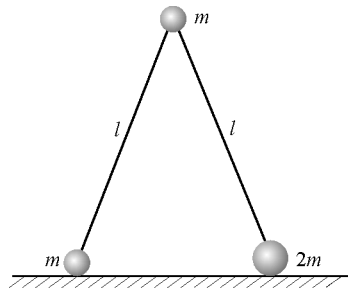


图1 案例示意图

首先依据上述案例描述建立物理模型.第一,题中桌面光滑,那么小球与桌面不存在摩擦力,而铰链处的摩擦力往往也可以忽略不计,并且细杆为刚性的,这意味着在该体系中不存在耗能或者储能的装置,也就是说体系的机械能守恒.第二,根据题意,3个小球的物理尺寸远小于细杆长度,可忽略不计.虽然图中为了区分小球质量而画出不同大小的球,但

3个球均可视为质点.在此基础上建立如图2所示坐标系,以桌面上两小球的初始点为坐标原点 O ,桌面为 x 轴,垂直向上为 y 轴正方向.假设小球和铰链球的坐标分别为 $(x_1, 0)$ 、 $(x_2, 0)$ 、 (x_3, y_3) .

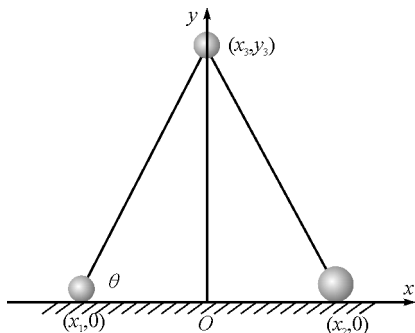


图2 建立坐标系

这里用受力分析的方式是比较难的,因为细杆的支撑力很难直接得到.根据前面分析,可以知道体系的机械能是守恒的,即

$$mgl = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2} \cdot 2mv_2^2 + \frac{1}{2}m(v_3^2 + v_y^2) + mgl\sin\theta \quad (1)$$

其中 v_α ($\alpha=1, 2, 3$) 是第 α 个球在 x 方向的速度, v_y 是铰链球在 y 方向的速度.另一方面,由于铰链处摩擦力为零并且桌面光滑,那么该系统受到的外力只有 y 轴方向的重力,即体系在 x 轴方向动量守恒,则有

$$mv_1 + 2mv_2 + mv_3 = 0 \quad (2)$$

这样根据守恒定律得到两个方程,但是这里面有4个未知量,也就是还需要两个方程才能得到解.这两个方程可以由刚性细杆长为 l 的约束条件给出.由图2可知

$$x_3 - x_1 = x_2 - x_3 = l\cos\theta \quad (3)$$

$$y = l\sin\theta \quad (4)$$

式(3)和(4)两边对时间求导并消去 θ 可得4个速度间的限制关系

$$v_1 - v_3 = v_y \tan\theta \quad (5)$$

$$v_2 + v_1 - 2v_3 = 0 \quad (6)$$

将式(1)、(2)、(5)和(6)联立可以得到3个球的运动方程.这个计算过程是繁冗的,我们将其交由Mathematica的Solve命令处理则会简单很多.

运用Mathematica得到方程的解为

$$v_3 = \frac{1}{5}v_1 = -\frac{1}{3}v_2 = \frac{1}{4}v_y \tan\theta \quad (7)$$

$$v_y = -4 \frac{\sqrt{gl(1 - \sin\theta)}}{\sqrt{8 + 22 \tan^2\theta}} \quad (8)$$

由此,可以得到每个球的速度是夹角 θ 的函数,与质量 m 无关.假设 $l=1$ m并取 $g=10$ m/s²,可以用Mathematica的Plot功能画出 $\theta-v$ 曲线如图3所示.

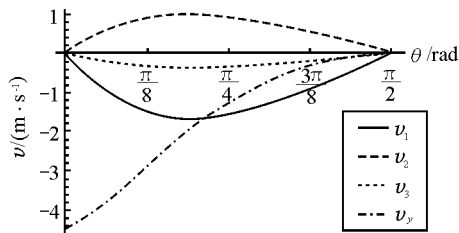


图3 各速度分量与 θ 的关系

图3可以明显展示出速度随着夹角 θ 变化的趋势.开始时, $\theta = \frac{\pi}{2}$,3个球的速度均为零.最终当铰链球达到桌面时, $\theta = 0$,两个小球的速度依然为零,但铰链球速度垂直向下达到最大速度.中间过程中3个球在 x 方向经历了先加速后减速的过程.对于这样的结果,我们可以还原其过程:开始时3个球均静止,铰链在重力的作用下有向下运动的趋势,通过细杆给桌面的两小球施加向外的推力,由于球 $2m$ 质量大于球 m ,推动球 $2m$ 付出了更大的力.相反,铰链球在推动小球的同时,也受到来自两小球的反推力,反推力的合力指向左斜向上方.反推力在 y 方向的分力抵消一部分重力,使铰链球下落小于重力加速度,在 x 方向的分力推动铰链球在 x 方向做加速运动.随着运动的进行,细杆对两小球的推力逐渐减小为零并随后变为拉力,这个点位的 θ 大概在 0.19π 附近.这之后,细杆的拉力使得3个球在 x 方向做减速运动,而在 y 方向铰链球做加速度逐渐变大的加速运动.

为了建立运动学方程并能更清晰地了解运动过程,还应知道3个球的速度随时间的变化.在式(7)和(8)中,已知速度和角度 θ 的关系,那么只需要再知道 θ 对时间的依赖即可.利用速度的定义和几何结构的关系可以得到

$$\frac{dy_3}{dt} = l\cos\theta \frac{d\theta}{dt} = v_y(\theta) \quad (9)$$

或者

$$\frac{d\theta}{dt} = -4 \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{\frac{1 - \sin\theta}{15 - 7\cos 2\theta}} \quad (10)$$

该微分方程解析形式的解很难得到,但是可以运用 Mathematica 的 NDSolve 进行数值求解. 将得到的 $\theta(t)$ 代入式(7)和(8)就可以得到速度随时间变化的关系. 用 NIntegrate 命令将速度对时间进行积分就得到了3个球的位移. 位置和速度坐标对时间的依赖分别画在图4(a)和图4(b)中.

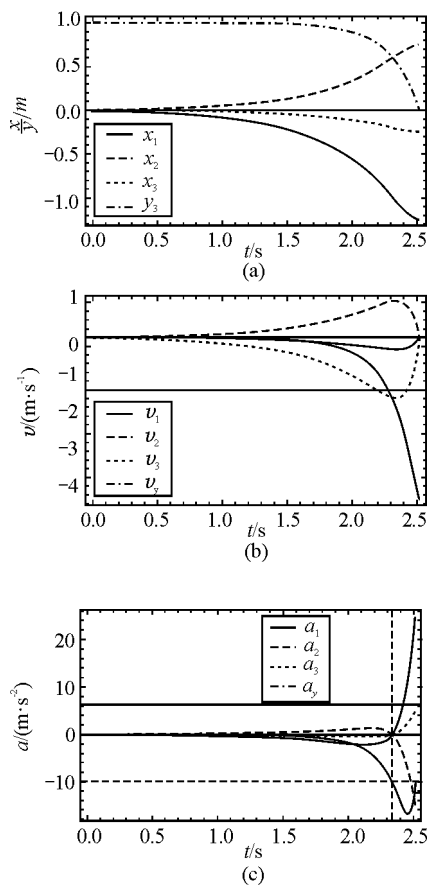


图4 位置坐标(a)、速度(b)、加速度(c)对时间的依赖关系

从图中可以看出刚开始时,3个球的运动是比较缓慢的,这是因为此时的三角形支架很尖锐, θ 较大接近 $\frac{2}{\pi}$,杆对球的推力分量主要在 y 方向上抵消重力加速度,在 x 方向上较小,因此无论是在 x 方向还是 y 方向,加速度都比较小,导致速度和位移都很小,运动缓慢.随着时间的推进, θ 角逐渐减小,此时杆对球的 x 方向分力占比逐渐变大, y 方向分力占比逐渐变小.导致的现象就是3个球在 x 方向和铰链球在 y 方向的加速度越来越大,速度快速增大,小球和铰链球的位移逐渐显现出来.但是这里并没有提及杆对球的作用力的改变,实际上在运动的过程中,杆上的力随着时间慢慢变小,直到变为零,随后由推动小球向外加速的推力变为使它做减速运动的

拉力.两个效果对加速度的综合结果如图4(c)所示.

上文中提到过这一刻 θ 大概在 0.19π 附近,而时间则是 $t \approx 2.348$ s,为图4(c)中竖直虚线位置所示.在该时刻铰链球 y 方向的加速度为重力加速度 g (水平虚线),这之后杆对铰链球的力使它在 y 方向加速度大于 g .当时间继续增加到 $t \approx 2.46$ s,夹角 θ 的减小令 y 方向分力占比 $\sin \theta$ 减小,超过了杆对球拉力的影响,使得加速度迅速回落.直至铰链球接触到桌面,杆对球只有水平拉力, a_y 回复到重力加速度 g .

目前为止,利用 Mathematica 的解方程和作图能力,该案例中体系运动的基本物理过程就很清楚了.针对此案例这里做动图细究可以发现,若假定两杆完全并拢时 $\theta = \frac{\pi}{2}$,系统受力平衡并不会演化,称之为系统处于稳态.然而这个稳态是不稳定的,也就是我们所学的亚稳态,虽然受力平衡,但是稍给扰动就会偏离平衡位置.因此,在演化时并不能将初始位置定为 $\theta = \frac{\pi}{2}$.假定初始时,角度偏离了 $\Delta\theta$,演化的过程则依赖于 $\Delta\theta$ 的取值, $\Delta\theta$ 越接近于零,系统演化越慢,铰链球接触到桌面的总演化时间 T 越长,若 $\Delta\theta = 0$,则演化时间无穷大,因为系统不会演化,结果展示在表1中.

表1 细杆张开夹角与演化时长的关系

$\Delta\theta/\text{rad}$	0.1	0.01	0.001	0.000 1	...	0
T/s	1.309	2.516	3.723	4.930	...	∞

实际上图3和图4所示的结果中 $\Delta\theta$ 取值0.01.用 Mathematica 制作动图有两种方式,一种是利用 Manipulate 命令在界面画出,另一种是用 Export 命令输出 GIF 图片的方式.

图5是演化动图中截取的切片,其中 $\tilde{t} = \frac{t}{T}$,是当前时间 t 在总演化时间 T 中的位置.可以看出起初时,系统演化得很慢,随着时间的流逝,演化过程会越来越快.利用动图演示的方式,不仅能激励学生兴趣,抓住学生课堂注意力,还能将整个物理过程活灵活现地展现在学生眼前.课本中某些晦涩难懂的概念也能得到充分的讨论,比如这里的亚稳态,是一个不太好理解的概念,利用实例展示的方式表达出来,令学生理解得更深刻.

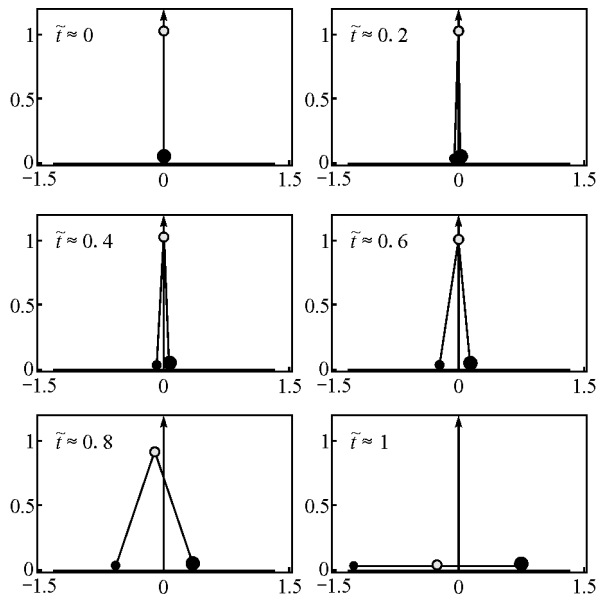


图5 系统演化过程切片

3 总结

本文讨论了两轻质细杆连接3个小球运动的问题,这是一个典型的受约束多体运动问题.本质上,这是一个将重力势能转化为小球动能的过程.从系统的能量和动量守恒出发,辅以束缚条件给出的约束方程,利用 Mathematica 软件的符号运算和数值求解能力,得到了在给定初始条件下各质点位置坐标、速度和加速度随时间演化的曲线、运动轨迹.

The Analysis of Constrained Many-body Motion Problem Based on Mathematica

GUO Longfei YAO Honglin SONG Tieling LI Boli WU Hao

(Department of Basic, Space Engineering University, Beijing 101400)

Abstract: Constrained many-body motion involves the comprehensive application of many physical knowledge including particle kinematics, dynamics, conservation law and so on. In this paper, we study a typical case of constrained many-body motion in which three balls are linked by two thin rods with light rigid bodies. If the initial conditions are given, we start from conservation law and constraint equation, using the powerful symbolic operation and equation solving ability of Mathematica software to solve such problems, get the detailed process of the system motion, including the change of position coordinates, velocity and acceleration over time, and visualize it. In addition, we also discuss the effect of the change of initial conditions on the motion process. Using Mathematica software to solve such problems can help students get rid of the shackles of tedious mathematics and pay more attention to the understanding of physics knowledge and concepts, so as to improve the efficiency of learning.

Key words: Mathematica; constrain; many-body motion

此外,我们还分析了初始条件,即两杆张开角度对系统运动的影响.分析此模型时,对 Mathematica 的应用使我们摆脱了数学上繁冗复杂的计算过程,将更多精力关注在物理知识和概念上的理解,对教师教学和提高学生学习大学物理的效率大有帮助.

参考文献

- [1] 李文娜,高永昌,马瑞霞. 焰火——多质点的抛体运动[J]. 物理教学探讨,2006,24(259):36-37.
- [2] 舒新文,许新胜,姚关心,等. 一种绳约束两质点的运动研究[J]. 大学物理,2017,36(2):28-33.
- [3] 黎培进. 非对称全同质点共线系统的振动[J]. 广西物理,1998,19(4):1-3.
- [4] 唐曙光. 在物理教学中使用 Mathematica[J]. 物理通报,2003(10):25-26.
- [5] 董键. Mathematica 与大学物理计算[M]. 北京:清华大学出版社,2010.
- [6] 赵文丽,高峰,王刚,等. Mathematica 在大学物理教学中的应用举例[J]. 物理通报,2019(8):10-13.
- [7] 周小燕,梁青青,杨惠,等. “大学物理”课程与 Mathematica 软件相结合的教学研究[J]. 兰州文理学院学报(自然科学版),2022,36(5):119-123.
- [8] Stephen Wolfram. *An Elementary Introduction to the Wolfram Language*[M]. Champaign:Wolfram,2015.
- [9] (美)Cliff Hastings. Mathematica 实用编程指南[M]. Wolfram 传媒汉化小组,译.北京:科学出版社,2018.