MATLAB 实现微元过程的可视化

—— 以 3 人相遇问题为例

王美芳

（复旦大学附属中学　上海　200433）

（收稿日期：2023－09－06）

摘　要：如何让学生清晰地“看”到物理过程，比如一些变速曲线运动．借助 MATLAB 编程可以将比较复杂的物理过程可视化．以物理中的经典 3 人相遇问题为例，借助 MATLAB 编程对相遇过程无限分割，微元处理和累加，并给出轨迹图．另外还分析了 MATLAB 在中学物理教学中的价值，希望抛砖引玉，能看到更多的应用．

关键词：轨迹；微元；可视化；MATLAB

1　问题来源

1.1　题目

【题目】处于正三角形 3 个顶点的 3 人 A、B、C（可看成 3 个质点）从 $t=0$ 时刻开始分别以相同的速率 v 运动，运动过程中 A 的运动速度方向始终指着当时 B 所在的位置，B 始终指向当时 C 所在的位置，C 则始终指向当时 A 所在的位置，已知初始 3 人到三角形中心的距离为 r，试问：3 人何时一起相遇？

1.2　常见解法

如图 1 所示，设初始 3 人处于 A、B、C 点，正三角形中心位置为 O．观察 A、B、C 的运动：A 运动方向始终指向 B，B 运动方向始终指向 C，C 运动方向始终指向 A，则 A、B、C 均作曲线运动．可将整个运动过程进行分割：将总时间 t 平均分割成 n 份，每一份时间 Δt 为 $\frac{t}{n}$．当 n 趋向于无穷大，则 Δt 趋向于零，这时每一份时间 Δt 内均可近似看成直线运动．

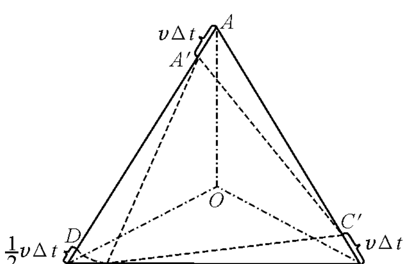


图 1　解析图

分析计时开始的第一个 Δt 时间内的运动：A 沿 AB 方向运动到 A'，同理，B 沿 BC 方向运动到 B'，C 沿 CA 方向运动到 C'，以 A' 为圆心，$A'B'$ 长度为半径，作圆弧，与 AB 相交于 D 点．由于 Δt 趋向于零，弧长 $\overset{\frown}{B'D}$ 可看成弦长 $\overline{B'D}$，且 $DB'A'$ 构成了顶角趋向于零，底角趋向于 90° 的等腰三角形，而 $BB'D$ 构成了直角三角形．AB 间距缩短为 $A'B'$，缩短了 $\overline{AA'}+\overline{DB}$，数值上为 $v\Delta t+\frac{1}{2}v\Delta t$，则这段时间内的等效速率

$$v_{AB}=\frac{v\Delta t+\frac{1}{2}v\Delta t}{\Delta t}=\frac{3}{2}v$$

以此类推，在第二个 Δt 时间内，运动方向由 AB 方向变为 $A'B'$ 方向，$A'B'$ 的距离又缩短了 $v\Delta t+\frac{1}{2}v\Delta t$，则等效速率不变，还是 $\frac{3}{2}v$．由此可知，AB 之间的距离是线性减小的，等效速率始终为 $\frac{3}{2}v$，AB 从初始长度为 $\sqrt{3}r$ 到 3 人相遇减小为零，总运动时间

$$t=\frac{\sqrt{3}r}{\frac{3}{2}v}=\frac{2r}{\sqrt{3}v}$$

1.3　学生提问

以上步骤已经完成了本题的求解，但在实际教学过程中，学生常常会这样问：老师，这道题的运动轨迹该怎么画呢？

这是一个很好的问题，也体现了学生不拘泥于

题目本身，有独立的、深入的思考. 面对学生的提问或质疑，笔者的原则是不管提问是否超纲，尽可能回答，如果回答这个问题需要学习新的知识或技能，那就尽可能去学习.

从微元思想出发，按步骤画出每隔 Δt 时间质点的位置，连接这些位置，会得到折线图，即大致的轨迹，如图 2 所示.

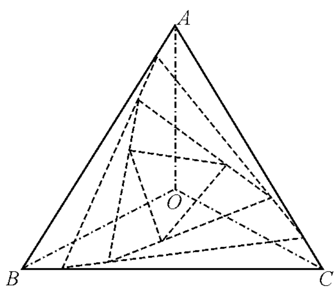


图 2　微元思想画出的大致轨迹图

那么，我们还能将轨迹画得更精确吗？想象一下当 Δt 趋向于零，折线应退化为一条光滑曲线，即真正的轨迹. 自己作图很难画好这条光滑曲线，是不是可以利用计算机编程去描述这个微元过程，画出精确的轨迹图呢？

2　计算机编程实现微元过程的可视化

2.1　编程语言选择 MATLAB

MATLAB 是一个功能强大的科学及工程计算软件，可用于数值计算、符号运算、可视化建模、仿真和图形处理等. 编程过程主要参考了《MATLAB 程序设计与应用基础教程》[1] 和 MATLAB 自带的帮助文件.

2.2　具体实现

选择极坐标来描述 3 个质点的位置变化. 给出初始数据：比如本题中，让初始 3 人到三角形中心的距离 $r=3$ m，速率 $v=1$ m/s，借助于计算机强大的计算能力，Δt 可以取得小一些，比如 0.01 s. 然后依据前面所用的解法计算每经过 Δt 时间的位置（在每一个 Δt 时间内看成直线运动），最终得到轨迹. 编程如图 3 所示.

```
%三人相遇问题，看成质点，初始位置在正三角形的三个顶点 A、B、C 处，已知顶点对中心间距为 r，速率为 v，画出轨迹，计算相遇时间 t
v=1; r =3; delt=0.01; n=1; t=0;                       %速度，时间间隔，初始间距均可调整
theta1=0;r1=r;theta2=2*pi/3;r2=r;theta3=4*pi/3;r3=r;          %对初始位置赋值，采用极坐标
while min(r1(n))>0                                          %直到到达 O，循环结束
r1(n+1)=r1(n)-v*delt*sqrt(3)/2;     theta1(n+1)=theta1(n)+v*delt*0.5/(r1(n)-v*delt*sqrt(3)/2);
r2(n+1)=r1(n+1);                    theta2(n+1)=theta2(n)+v*delt*0.5/(r2(n)-v*delt*sqrt(3)/2);
r3(n+1)=r1(n+1);                    theta3(n+1)=theta3(n)+v*delt*0.5/(r3(n)-v*delt*sqrt(3)/2);
%计算 It 时间后的位置
if r1(n+1)<=0
r1(n+1)=0; r2(n+1)=0; r3(n+1)=0;
delt=r1(n)/v;
end                                       %对最后一步近似处理
n=n+1;
t=t+delt;                                 %计算这一步完成后的总时间
polarplot(theta1,r1, '.',theta2,r2,'.',theta3,r3, '.')   %极坐标，画点
 %polarplot(theta1,r1, '-o',theta2,r2, '-o', theta3,r3, '-o')   %极坐标，线+圈
 hold on
 end
 hold off
 t                                        %显示总运动时间
```

图 3　计算机编程

由于 Δt 取得很小，为 0.01 s，这些点会相互连接，构成了光滑曲线，得到的轨迹如图 4 所示.

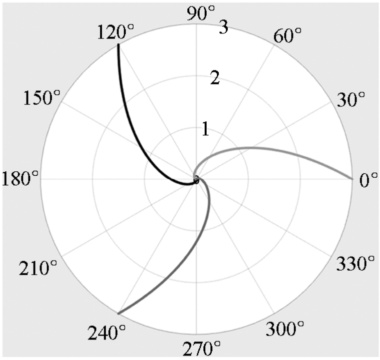


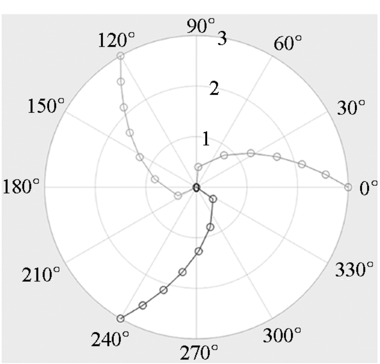
图 4　轨迹图光滑曲线

3　MATLAB 实现微元过程可视化的价值分析

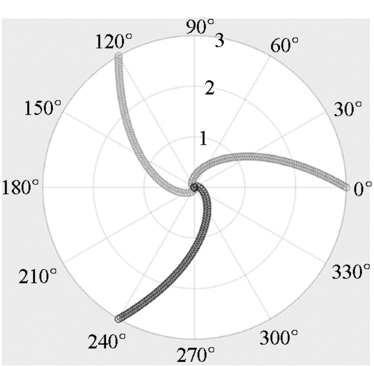
3.1　展现微元思想

能灵活地进行参数调整，能更精确地进行过程分析，进而展现微元思想的价值.

在程序设计中，初始距离、速率以及 Δt 的大小都是可以自己设定的. 比如这里给出质点初始位置到中心的距离 $r=3$ m，运动速率 $v=1$ m/s，若 Δt 分别取 0.5 s、0.05 s，并改用“线 + 圈”的方式画出运动过程的折线图，得到轨迹如图 5 所示.



(a) Δt=0.5 s



(b) Δt=0.05 s

图 5　给定初始值的运动过程图

图 5 中每一小段直线表示 Δt 时间内走的直线距离，圈表示每经过 Δt 时间质点的位置.

从图 5 可以看出：当 Δt 取得比较小，折线图自动退化成了光滑曲线.

这样的对比能让学生“看到”微元法的作用：Δt 越小，越接近于真实情景. 当 Δt 趋向于零，即进行无限分割，则会得到真实轨迹.

此外，两种情况下对总时间的计算结果分别为 3.401 s（Δt 取 0.5 s）和 3.462 s（Δt 取 0.05 s），与前面的计算得到的真实值

$$t=\frac{\sqrt{3}\,r}{\frac{3}{2}v}=\frac{2r}{\sqrt{3}\,v}=\frac{2\times 3}{\sqrt{3}\times 1}\ \mathrm{s}=$$

$$2\sqrt{3}\ \mathrm{s}\approx 3.464\ \mathrm{s}$$

相比，Δt 取 0.05 s 的情况下更接近真实值. 由此我们也可以预测当 Δt 取得更小，应更接近于真实值. 若进一步减小 Δt，取 $\Delta t=0.005$ s 运行以上程序，得到的结果是 3.464 s，在保留 3 位小数的情况下，已经等于真实值了.

这样，无论从程序获得的运动轨迹还是运动时间，MATLAB 都实现了微元过程的可视化，学生能通过对比感受到 Δt 趋向于零的极限思想，这对微积分也是很好的启蒙.

3.2　微元过程可视化的应用

微元过程的可视化是信息技术应用于物理教学的积极尝试.

现在所提倡的核心素养培养、单元教学及深度学习，都对教师素养提出了更高的要求，其中就需要教师有能力将信息技术应用于物理教学. MATLAB 是很好的数值计算、图像可视化和过程分析[2] 方面的编程工具，它还擅长展示三维空间的各种情景，适合去描述高中物理中的电场和磁场等[3]. 学习难度不大，灵活性强，适用范围广，建议高中教师选用.

3.3　有利于培养学生的质疑精神和创造能力

学生在课堂上提出轨迹这个问题，笔者一时没有办法回答，课后进行了思考，选择了 MATLAB，

（下转第 135 页）

将式(14) 左边展开得

$$5k^2 + 7k + 2 - (k+1)\sqrt{k(17k+8)} < 4k + 2 \quad (15)$$

将式(15) 根式移到右边得

$$5k^2 + 3k < (k+1)\sqrt{k(17k+8)} \quad (16)$$

将式(16) 两边平方得

$$25k^4 + 30k^3 + 9k^2 < 17k^4 + 42k^3 + 33k^2 + 8k \quad (17)$$

整理不等式(17) 得

$$2k^4 - 3k^3 - 6k^2 - 2k < 0 \quad (18)$$

不等式(18) 因式分解得

$$k(k+\frac{1}{2})(k-\sqrt{3}-1)(k+\sqrt{3}-1) < 0 \quad (19)$$

不等式(19) 对应的等式为

$$k(k+\frac{1}{2})(k-\sqrt{3}-1)(k+\sqrt{3}-1) = 0 \quad (20)$$

等式(20) 的解为

$$k_1 = \sqrt{3}+1 \qquad k_2 = 0$$
$$k_3 = -\sqrt{3}+1 \qquad k_4 = -\frac{1}{2} \quad (21)$$

$k_4 = -\frac{1}{2}$ 是增根,应舍去,同时由于$\frac{M}{m}=k$,k 不能为负值,所以不等式(13) 的解集为

$$0 < k < \sqrt{3}+1 \quad (22)$$

文献[1] 和文献[2] 都没有对$k=\frac{M}{m}=0$讨论,从而出现讨论的不完善. 下面我们把结论完善:

(1)$k=0$ 及 $k=\sqrt{3}+1$,$x^2=\sin^2\theta=1$,$\theta=\frac{\pi}{2}$,小球达到最低点时,速率达到最大.

(2)$0<k<\sqrt{3}+1$,$x^2=\sin^2\theta<1$,$\theta<\frac{\pi}{2}$,小球运动到半圆轨道最低点前的某一位置,小球的速率最大.

(3)$k>\sqrt{3}+1$,$x^2=\sin^2\theta>1$,但是由于 $x^2=\sin^2\theta$ 的最大值为 1,所以 $x^2=\sin^2\theta$ 取 1,即 $\theta=\frac{\pi}{2}$,于是小球达到最低点时,速率达到最大.

4　结束语

本文利用极限法发现问题,并通过严格的数学证明求出 $k=\frac{M}{m}=0$ 时,小球的最大速率出现在最低点位置. 以后在研究物理问题中的数学表达式时,尤其类似式(13),应该把所有根求解出来,不然很容易漏掉零根. 本文的讨论结果,为小球沿半圆轨道下滑速率在何处取最大的命题提供理论依据.

参 考 文 献

[1] 周起. 摆球模型中质量比临界值的存在及推导[J]. 物理教学,2023(4):46－52.

[2] 郑金. 探究小球沿半圆轨道下滑速度的极值条件[J]. 物理教师,2015(12):63－64.

(上接第 114 页)

并完成了编程,之后在课堂上向他们展示轨迹图. 学生们对这张漂亮的轨迹图表现出了极大的好奇心. 之后,有学生学习了 MATLAB 编程,尝试用它去解决其他的一些物理问题,也有学生由此对微积分产生了兴趣,选修了学校的“物理中的微积分” 这一课程.

我们希望培养的是有想法、有主动学习能力的学生. 当学生提出各种问题的时候,如果教师能够尽自己的能力去回答这些问题,那么就能做出榜样,引导学生深入思考,提出更多的问题,学生也会学着教师尝试去解决这些实际问题,这样的学生才真正具备物理核心素养. 高中物理中,微元累加,极限思想是核心物理思想之一,高中阶段学生提出的不少问题究其根本就是对这个思想的理解. 对微元过程的可视化处理可以很好地回答这类问题,有助于提升学生的学习兴趣,激发求知欲和创造能力.

参 考 文 献

[1] 张岳. MATLAB 程序设计与应用基础教程[M]. 北京:清华大学出版社,2011:55.

[2] 俞罕卿,钱卓琳,朱国强. 猎犬追狐狸问题的求解与 MATLAB 模拟[J]. 物理教学,2020(3):63－65.

[3] 黄志豪. 一道基于镜像法对电场的严格求解问题[J]. 物理教师,2018(12):69－70.