一阶比耐公式与进动角

王建秋

（台州市第一中学　浙江 台州　318000）

黄亦斌

（江西师范大学物理与通信电子学院　江西 南昌　330022）

（收稿日期：2023－09－07）

摘　要：在通常的比耐公式的基础上，提出一阶比耐公式，指出其重要性在于能完全确定轨道形状．然后给出了应用实例，并将其用于进动角的求解，并填补了郎道教材讨论进动角时缺失的逻辑细节．

关键词：比耐公式；能量积分；平方反比；进动角

1　二阶和一阶比耐公式

对于有心力场 $\boldsymbol{F}=F(r)\hat{e}_r$，质点的动力学方程为

$$\begin{cases} m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=F(r) \\ m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})=0 \end{cases}$$

将第二式积分，得（单位质量的）角动量积分为

$$r^2\dot{\theta}=h \tag{1}$$

将式(1)代入质点动力学方程消 $\dot{\theta}$，得

$$\ddot{r}=\frac{F}{m}+\frac{h^2}{r^3} \tag{2}$$

将两边对 r 积分，注意 $F(r)=-\dfrac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}$，可得

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{mh^2}{2r^2}+V(r)=E \tag{3}$$

这就是能量积分．

比耐公式是由式(1)、(2)消去时间而得，故没有时间信息，只有轨道信息，是仅含 r、θ 的微分方程．其具体做法是令 $r=\dfrac{1}{u}$，由式(1)得到 $\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{hu^2}$，代入式(2)，即得比耐公式[1]

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u=-\frac{F\left(\frac{1}{u}\right)}{mh^2u^2} \tag{4}$$

这是关于轨道的二阶微分方程，因为其源头式(2)就是二阶微分方程．之所以要做代换 $r=\dfrac{1}{u}$，是因为这样做的结果式(4)很简单．如果不做该代换，则比耐公式为

$$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\theta^2}-\frac{2}{r}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2-r=\frac{r^4F(r)}{mh^2}$$

显然要复杂得多．

一个很自然的想法是：如果式(2)的角色用式(3)代替，会是什么结果？其结果是直截了当的．将 $\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{hu^2}$ 代入式(3)，马上得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+u^2=\frac{2\left[E-V\left(\frac{1}{u}\right)\right]}{mh^2} \tag{5}$$

这也是关于轨道的微分方程，只不过是一阶的，故可称为“一阶比耐公式”．此式还可以由式(4)积分一次得到，只要在式(4)两边同乘以 $\mathrm{d}u$ 即可，其过程类似于动能定理的获得

$$\mathrm{d}u\,\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)=\mathrm{d}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2\right]$$

$$-\frac{F\left(\frac{1}{u}\right)}{mh^2u^2}\mathrm{d}u=\frac{F\left(\frac{1}{u}\right)}{mh^2}\mathrm{d}\left(\frac{1}{u}\right)=-\frac{1}{mh^2}\mathrm{d}\left[V\left(\frac{1}{u}\right)\right]$$

只不过通过这种方式获得的结果，其中积分常数跟

作者简介：王建秋（1981－　），男，中学高级教师，物理奥赛金牌教练，台州市强基人才培养名师工作室领衔人，擅长数学物理交叉学科的教学与研究工作．

通讯作者：黄亦斌（1973－　），男，博士，副教授，研究方向为理论物理和学科教学（物理）．

能量 E 的关系还需另外寻找.一阶微分方程的解中所含的积分常数为初始极角,可取为零,与轨道形状无关,故而可以说,一阶比耐公式比二阶比耐公式的优势在于它能完全确定轨道形状.

2 一阶比耐公式应用举例

一阶比耐公式既可以单独使用,也可以配合二阶比耐公式使用.例如,对于平方反比力场 $\boldsymbol{F}=\frac{-\hat{e}_r\alpha}{r^2}$,由二阶比耐公式(4)可得

$$u=\frac{1}{r}=\frac{\alpha}{mh^2}+A\cos(\theta-\theta_0) \tag{6}$$

其中,A 为积分常数.而 A(或偏心率 e)跟能量的关系却并非可以轻松获得.但如果使用一阶比耐公式,将解代入,注意 $V=-\frac{\alpha}{r}=-\alpha u$,即可得

$$A=\frac{|\alpha|}{mh^2}\sqrt{1+\frac{2Emh^2}{\alpha^2}}$$

当然,一阶比耐公式也可以单独用来求轨道.看一个例子.设力场除了平方反比项外,还有立方反比项的修正,其势能为

$$V=-\frac{\alpha}{r}+\frac{\lambda}{r^2}=-\alpha u+\lambda u^2$$

代入式(5),可得

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+\left(1+\frac{2\lambda}{mh^2}\right)u^2-\frac{2\alpha}{mh^2}u=\frac{2E}{mh^2} \tag{7}$$

假定 $|\lambda|$ 不大.令 $k=\sqrt{1+\frac{2\lambda}{mh^2}}$,则上式配方,得

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+k^2\left[u-\frac{\alpha}{mh^2k^2}\right]^2=$$

$$A^2\equiv\frac{1}{mh^2}\left(2E+\frac{\alpha^2}{mh^2k^2}\right)$$

观察上式结构,不妨设

$$k\left(u-\frac{\alpha}{mh^2k^2}\right)=A\cos\beta$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}=A\sin\beta$$

前式对 θ 求导,并把后式代入,易得

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\theta}=-k$$

$$\beta=-k\theta$$

故有

$$u=\frac{A}{k}\cos(k\theta)+\frac{\alpha}{mh^2k^2}$$

把 A 代入,得

$$u=\frac{1}{r}=$$

$$\frac{|\alpha|}{mh^2k^2}\sqrt{1+\frac{2Emh^2k^2}{\alpha^2}}\cos(k\theta)+\frac{\alpha}{mh^2k^2}$$

我们希望研究三次反比力的修正对引力的椭圆轨道的影响,故 $\alpha>0$,有

$$r=\frac{\frac{mh^2k^2}{\alpha}}{1+\sqrt{1+\frac{2Emh^2k^2}{\alpha^2}}\cos(k\theta)} \tag{8}$$

同时能量 $E<0$.此时的轨道类似椭圆,但不封闭,一个周期之后不能完全回到原点,存在进动.其每周期的进动角为

$$\frac{2\pi}{k}-2\pi=2\pi\left(\frac{1}{k}-1\right)\approx-\frac{2\pi\lambda}{mh^2} \tag{9}$$

式(7)还可能有其他情况下的解.比如,若 $1+\frac{2\lambda}{mh^2}<0$,则配方后可以参考恒等式 $\cosh^2x-\sinh^2x=1$,得到相应的表达式.对于参数 α、λ、E 的各种可能,或无解,或可得到严格解.具体讨论从略.

3 进动角公式

上面这种模型是可以精确求解的,但一般情形没这么幸运.为讨论进动角,由一阶比耐公式,可得

$$\mathrm{d}\theta=\pm\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\frac{2\left[E-V\left(\frac{1}{u}\right)\right]}{mh^2}-u^2}}$$

两边积分可得轨道方程.换回用 r 表示,有

$$\mathrm{d}\theta=\pm\frac{\frac{h}{r^2}\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2[E-V(r)]}{m}-\frac{h^2}{r^2}}} \tag{10}$$

分母根号内的式子大于零给出 r 的允许区间,而分母等于零,即方程

$$V(r)+\frac{mh^2}{2r^2}-E=0 \tag{11}$$

则给出 r 的最值.如果轨迹是有界的,那么上式给出两个根 r_1、r_2(设 $r_1<r_2$).但轨道不一定封闭,相邻两次近点之间矢径转过的角度为

$$\Delta\theta = 2\int_{r_1}^{r_2} \frac{\frac{h}{r^2}\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2[E-V(r)]}{m}-\frac{h^2}{r^2}}} \tag{12}$$

为方便计，下面考虑将式(12)改为更简单的形式.注意到其中的被积函数可以写为

$$\frac{\frac{h}{r^2}}{\sqrt{\frac{2[E-V(r)]}{m}-\frac{h^2}{r^2}}} = -\frac{\partial}{\partial h}\sqrt{\frac{2[E-V(r)]}{m}-\frac{h^2}{r^2}}$$

于是式(12)则可以简化为[2]

$$\Delta\theta = -2\frac{\partial}{\partial h}\int_{r_1}^{r_2}\sqrt{\frac{2[E-V(r)]}{m}-\frac{h^2}{r^2}}\,\mathrm{d}r \tag{13}$$

上面两式相比，似乎式(13)就是将求导符号$\frac{\partial}{\partial h}$从积分号里面提出来而已.但事情没这么简单.实际上积分上下限r_1、r_2都是h的函数，因为它们都是方程(11)的根，而方程的系数含有h.所以，式(13)并非是显然的.实际上，式(13)成立的基础是含参变量积分的导数

$$\frac{\partial}{\partial h}\int_{r_1(h)}^{r_2(h)} f(r,h)\mathrm{d}r = f(r_2(h),h)r_2'(h) - f(r_1(h),h)\cdot r_1'(h) + \int_{r_1(h)}^{r_2(h)}\frac{\partial}{\partial h}f(r,h)\mathrm{d}r \tag{14}$$

其中

$$f(r,h) = \sqrt{\frac{2[E-V(r)]}{m}-\frac{h^2}{r^2}}$$

注意r_1、r_2是方程(11)的根，故也是方程$f(r,h)=0$的根，即

$$f[r_1(h),h] = f[r_2(h),h] = 0$$

于是，式(14)右边前两项为零，这才最后有式(13)成立.

下面讨论由于对平方反比力场的小修正所导致的进动角.设势能为

$$V = -\frac{\alpha}{r} + \delta V(r)$$

势能的修正$\delta V(r)$会导致式(13)中被积函数的变化，但同时也会导致上下限r_1、r_2的变化.由于势能函数与角动量是独立的，我们只需考虑式(13)中的如下积分

$$\int_{r_1(\delta V)}^{r_2(\delta V)} g(\delta V,r)\mathrm{d}r$$

$$g(\delta V,r) = \sqrt{\frac{2\left[E+\frac{\alpha}{r}-\delta V(r)\right]}{m}-\frac{h^2}{r^2}}$$

完全类似于式(14)的精神，我们有

$$\int_{r_1(\delta V)}^{r_2(\delta V)} g(\delta V,r)\mathrm{d}r = \int_{r_1(0)}^{r_2(0)} g(0,r)\mathrm{d}r + g(0,r_2(0))\delta r_2 - g(0,r_1(0))\delta r_1 + \int_{r_1(0)}^{r_2(0)}\left.\frac{\partial g}{\partial(\delta V)}\right|_{\delta V=0}\delta V\mathrm{d}r$$

其中δr_1、δr_2为势能变化导致的上下限的一阶变化.上式的第一项代入式(13)，就得到无扰动时的值2π.由于$r_1(0)$、$r_2(0)$正是$\delta V=0$时方程$g(0,r)=0$的根，故上面第二、三项为零.于是，势能变化前后，一个周期内的转角之差(即进动角)为

$$\Delta\varphi = \Delta\theta - 2\pi = \frac{2}{m}\frac{\partial}{\partial h}\int_{r_1(0)}^{r_2(0)}\frac{\delta V(r)}{\sqrt{\frac{2(E+\alpha/r)}{m}-\frac{h^2}{r^2}}}\mathrm{d}r$$

此式还可再化简.利用轨道满足的关系，进动角为

$$\Delta\varphi = \frac{2}{m}\frac{\partial}{\partial h}\left[\frac{1}{h}\int_0^{\pi} r^2\delta V(r)\mathrm{d}\theta\right] \tag{15}$$

此式中的积分应理解为先代入未受微扰(即势能仅有$\frac{-\alpha}{r}$一项)时的轨道$r=r(\theta)$

$$r = \frac{\frac{mh^2}{\alpha}}{1+\sqrt{1+\frac{2Emh^2}{\alpha^2}}\cos\theta} \tag{16}$$

[即式(8)中令$k=1$即可，其中$\alpha>0$，$E<0$]其中两处r都要这样代入.于是得到关于θ的函数，可对θ积分.由于该轨道跟角动量h有关，故式中的求导$\frac{\partial}{\partial h}$不能只对括号内的$\frac{1}{h}$进行.

有了式(15)这个一般性结论，可以用它来讨论前面计算过的问题.立方反比修正下，$\delta V=\frac{\lambda}{r^2}$，代入式(15)，可以得到进动角跟式(9)完全相同.

参考文献

[1] 周衍柏.理论力学教程[M].3 版.北京：高等教育出版社，2015:51.

[2] 朗道，栗弗席兹.理论物理学教程第一卷力学[M].5版.李俊峰，译.北京：高等教育出版社，2021:32.