

费马原理之巧思应用

张思宇

(东北师范大学物理学院 吉林 长春 130024;

山西大学附属中学 山西 太原 030006)

王伟

(东北师范大学物理学院 吉林 长春 130024)

(收稿日期:2022-08-07)

摘要:费马原理是关于光传播的普遍原理,对物理学的发展起重要的推动作用.应用费马原理,巧解所需时间最短路径题等实际问题;运用费马原理及极限思想,推导出厚透镜的物像方程,方法简洁明了,并进一步得出近轴近似条件下,厚透镜、柱形透镜的物像方程,通过居家实验加以具体运用,探究其成像特点,有助于增强学生的科学探究能力.

关键词:费马原理 物像方程 厚透镜

物理教学以培养学生物理学科核心素养为重,物理学认识路径是物理学科本质的集中体现,随着研究的深入,需进一步加深认识路径由简单到复杂的思维层级,为学生物理学科能力发展提供可视化依据.加深理解和掌握认识路径,离不开在真实情境中解决具体问题的过程^[1].

费马原理,在中学、大学阶段都有学习,本文将费马原理应用于中学物理,求解所需时间最短路径等实际问题.到大学阶段,为进一步加深理解费马原理,运用其推导出厚透镜、柱形透镜物像方程,并通过居家实验探究其成像规律,有助于培养学生的科学探究能力.

1 理论基础

费马原理是几何光学最基本的定律,运用费马原理可以推导出几何光学的三大基本实验定律.

费马原理可以表述为:光在空间中从一点传播到另一点,实际的光程总是一个极值.也就是说,光传播的实际路径,其光程为极小值、极大值或恒定值^[2].在一般情况下,实际光程大多数是取极小值,但光程为极大值及恒定值的情况也存在.

2 应用费马原理巧解最短时间问题

在求解中学物理问题时,遇到求解匀速运动的最短时间路径题,可以将运动路径与光的传播路径类比,根据求解问题的类型,选择使用折射定律或者反射定律的结论,去进行求解^[3],这样可以避免使用导数求解,从而使问题简化.求解这类问题可以应用费马原理,将物体运动的速度看作光在不同介质中的速度,物体运动的路径看作光的传播路径.

以一具体实例来论证.如图1所示.当海里有人溺水时,岸上的人要进行施救,人在陆地中的速度为 v_r ,在海里的速度为 v_s ,施救者到海岸线的垂直距离为 d_1 ,溺水者到海岸线的垂直距离为 d_2 ,两者与海岸线垂足之间的距离为 h ,那沿着怎样的路径人可以最快到达溺水者位置进行施救?

解:运用费马原理求解,施救者路径即为光的传播路径,从施救者到达溺水者的位置,看作光从一种介质到另一种介质,发生了折射,满足光的折射定律

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (1)$$

其中令 $v_r = \frac{c}{n_1}$, $v_s = \frac{c}{n_2}$,可得

$$v_s \sin \theta_1 = v_r \sin \theta_2 \quad (2)$$

作者简介:张思宇(1999-),女,在读硕士研究生,研究方向为高中物理教学.

通讯作者:王伟(1968-),女,硕士,主要从事物理实验教学及研究工作.邮箱:phychun@qq.com.

$$\frac{v_s x}{\sqrt{d_1^2 + x^2}} = \frac{v_r (h - x)}{\sqrt{d_2^2 + (h - x)^2}} \quad (3)$$

求解式(3),得到 x 的值,从而求得最优路径.依据费马原理可得,在一般情况下,光会沿着所需时间最短的路径传播,求得最优路径,即求解所需时间最短的路径为光的实际传播路径^[4].

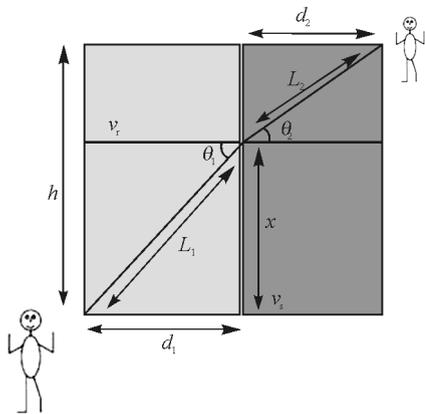


图1 最短时间问题示意图

3 柱形透镜

费马原理的思想贯穿在整个物理学习过程中.在大学学习阶段,随着几何光学学习的深入,对于一些复杂的光学元件大多采用逐次成像法得到其物像方程^[2],对费马原理的应用开始减少.本文直接运用费马原理,采用极限思想,推导出主轴外物点,在非近轴光线条件下厚透镜物像方程.从本质上解释近轴近似的原因,并具体应用到实践中.

3.1 厚透镜物像方程

光线经厚透镜折射光路如图2所示.

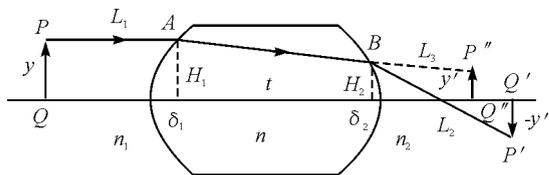


图2 (主轴外物点)厚透镜折射光路图

由 P 点发出的光线经厚透镜两次折射后成像于 P' 点,图中 P'' 点为光线经过第一个面折射后的中间像,其中 $AP'' = L$,厚透镜第一个折射面的曲率半径为 R_1 ,第二个折射面的曲率半径为 $-R_2$,则光程为

$$\Delta_{PABP'} = n_1 L_1 + nL - nL_3 + n_2 L_2 \quad (4)$$

改变入射光线, H_1, H_2 随之而变.由费马原理可知,光程应为极值或恒定值,采用极限思想,将光程对 H_1, H_2 求导均为零

$$\frac{\partial \Delta_{PABP'}}{\partial H_1} = \left[\frac{n_1 (-s + R_1)}{L_1} - \frac{n (s'' - R_1)}{L} \right].$$

$$\frac{H_1}{\sqrt{R_1^2 - H_1^2}} - \frac{n_1 y}{L_1} - \frac{n y''}{L} = 0 \quad (5)$$

$$\left[\frac{n_1 (-s + R_1)}{L_1} - \frac{n (s'' - R_1)}{L} \right] \frac{H_1}{\sqrt{R_1^2 - H_1^2}} =$$

$$\frac{n_1 y}{L_1} + \frac{n y''}{L} \quad (6)$$

由于 H_1 是变量,等式成立条件为两边系数均为零,可得式(7),同理,光程对 H_2 求导,可得式(8),推导出主轴外物点、在非近轴光线条件下厚透镜物像方程式(7)、(8)

$$\frac{n_1 (-s + R_1)}{L_1} - \frac{n (s'' - R_1)}{L} = 0 \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{n_1 y}{L_1} + \frac{n y''}{L} &= 0 \\ -\frac{n (s'' - t - R_2)}{L_3} + \frac{n_2 (s' - R_2)}{L_2} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{n_2 y'}{L_2} - \frac{n y''}{L_3} &= 0 \end{aligned} \right.$$

在近轴近似条件下, $H_1, H_2, y, -y', \delta_1, \delta_2$ 均为小量,进一步可得出近轴光线条件下厚透镜物像方程式(9)、(10)

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{n}{s''} - \frac{n_1}{s} &= \frac{n - n_1}{R_1} \\ \frac{n_1 y}{s} - \frac{n y''}{s''} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{n}{s'' - t} - \frac{n_2}{s'} &= \frac{n - n_2}{R_2} \\ \frac{n_2 y'}{s'} - \frac{n y''}{(s'' - t)} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (10)$$

本文通过推导过程说明近轴近似的原因,推导过程简单明了,没有使用太多的数学技巧,适合刚进入大学的学生学习^[5~7].

3.2 柱形透镜物像方程

随着研究的深入,需进一步加深认识路径由简单到复杂的思维层级,在真实情境中解决具体问题.本节应用费马原理,进一步深入研究柱形透镜物像方程,并通过实验探究其成像规律,为学生物理学科能力发展提供可视化依据^[1].

如图3所示,柱形透镜在竖直面内为一个矩形,光线通过并不会产生偏折,在水平面内的截面为一个圆形透镜,可看作为一个特殊的厚透镜^[8],厚透镜的厚度为 $t = 2R$.

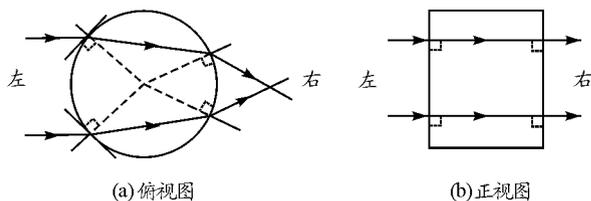


图3 柱形透镜俯视及正视图

$R_1 = R$ 为厚透镜第一个折射面的曲率半径, $R_2 = -R$ 为第二个折射面的曲率半径, 将其代入式(9)和(10), 可得在近轴近似条件下, 柱形透镜水平面内物像方程

$$\begin{cases} \frac{n}{s''} - \frac{n_1}{s} = \frac{n - n_1}{R} \\ \frac{n}{s'' - 2R} - \frac{n_2}{s'} = \frac{n - n_2}{-R} \end{cases} \quad (11)$$

当光线平行入射(或出射), 即 $s \rightarrow -\infty, s' \rightarrow \infty$ 时, 可分别得出像方(或物方)焦距

$$s' = f' = \frac{Rn_2(2n_1 - n)}{nn_1 + nn_2 - 2n_1n_2} \quad (12)$$

$$s = f = \frac{Rn_1(n - 2n_2)}{nn_1 + nn_2 - 2n_1n_2} \quad (13)$$

将柱形透镜放置在空气中, 即 $n_1 = n_2 = 1$ 时

$$\begin{cases} f' = \frac{R(2 - n)}{2(n - 1)} \\ f = \frac{R(n - 2)}{2(n - 1)} \end{cases} \quad (14)$$

近似简化令物点到厚透镜前表面的距离为物距, 厚透镜后表面到像点的距离为像距, 所以式(14)得出的焦距为像点到柱形透镜后表面的距离。

4 居家实验探究

通过居家实验探究柱形透镜成像规律。

实验器材: 柱形塑料杯(直径 6.2 cm, 高度 14.0 cm), 溶液(水、饱和食盐水), 带有左右部分反写的“光学”字样纸板。

注意: 将纸板上的图案、柱形水杯的几何中心, 及观察者视线位于同一直线上, 并且尽量使图案小一点(尽量满足近轴物在近轴光线条件)。

如图 4 和图 5 所示, 通过装满溶液的圆柱形杯, 去观察纸片上的文字; 改变纸片与柱形水杯的距离, 观察各种成像特点, 从而得到圆柱形透镜的成像规律, 并与理论值对比。在玻璃杯中注入水或饱和食盐水, 使液体高度超过图案即可; 通过观察可以发现, 像在水平面内发生变化, 左右颠倒, 图案变宽, 而在竖直平面内没有发生变化^[9]。



图4 加水前的成像

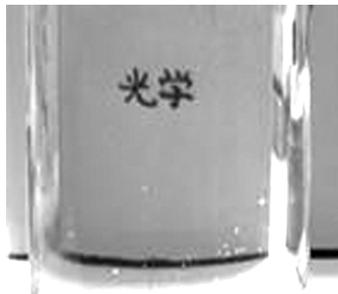


图5 加水后的成像

由式(14)可得装满水的柱形透镜(水的折射率为 1.33), 其焦距为 $f = 3.10$ cm; 装满饱和食盐水的柱形透镜(盐水折射率在 1.38 左右), 其焦距为 2.53 cm 左右; 改变纸片到柱形玻璃杯壁距离, 观察到的成像情况如表 1 所示。

表1 柱形透镜成像规律

注入溶液	纸片到前杯壁的距离 /cm		眼睛到后杯壁的距离 /cm		成像特点
	实验值	对应理论值	实验值	对应理论值	
水	-1.4	$s < f$		-19.19	正立, 放大的虚像
	-3.2	$s = f$	$+\infty$	742.66	不成像
	-7.0	$f < s < 2f$	16.0	13.28	倒立, 放大的实像
	-12.2	$s > 2f$	7.2	7.46	倒立, 缩小的实像

续表 1

注入溶液	纸片到前杯壁的距离 /cm		眼睛到后杯壁的距离 /cm		成像特点
	实验值	对应理论值	实验值	对应理论值	
饱和食盐水	-0.5	$s < f$		-13.09	正立,放大的虚像
	-2.5	$s = f$	$+\infty$	-1 036.74	不成像
	-4.3	$f < s < 2f$	12.5	20.41	倒立,放大的实像
	-13.3	$s > 2f$	4.5	5.47	倒立,缩小的实像

通过实验与计算得到的理论值进行对比,对于不同位置的成像特点与理论所对应的范围一致,但对于成像位置有较大的误差(在实验中为了减小误差运用了杯壁较薄的塑料杯)、像差等原因导致很难选出最优的图像,所以得到的物距与理论值差距较大。

5 结束语

通过对物理规律的学习,运用科学探究的方法去研究问题,并将其具体应用到实际生活中,有助于促进学生科学探究能力的发展。

费马原理作为几何光学的基本理论,不论对中学生还是大学生,对理解几何光学的物理本质有着非常重要的作用。本文旨在从本质上进一步探讨和说明,费马原理在几何光学学习中的重要性,将其应用到厚透镜物像方程的理论推导,并在居家实验中亲自研究验证,以助于学生更深刻地理解其思想,为

后续学习打下扎实的基础。

参考文献

- 1 张玉峰,陈征,魏红祥,等.物理学认识路径的构建[J].物理,2021(11):782~784
- 2 姚启钧.光学教程(第5版)[M].北京:高等教育出版社,2014.114~154
- 3 俞郭遥,鲍成章,朱国强.费马原理解决两过程匀速运动极值问题[J].物理通报,2018(S2):70~72
- 4 任雨萌,李艳辉.路径的选择问题——从费马原理看聪明的光[J].物理通报,2017,36(2):58~59
- 5 彭湘.用费马原理推导透镜的物像公式[J].大学物理,2002(4):20~21
- 6 张相武.再用费马原理推导透镜的物像公式[J].延安大学学报(自然科学版),2004(4):31~33
- 7 彭金松.几何光学中近轴条件引入误差的讨论[J].广西物理,1997(3):31~35
- 8 廖永容,杨晓梅,肖瑜.圆柱状透镜的趣味实验原理分析[J].物理教师,2018,39(9):56~58
- 9 时益江.作图与实验结合揭开柱形凸透镜奥秘[J].中学物理(初中版),2020,38(7):29~30

(上接第85页)

多解”[J].教育教学论坛,2014(36):76~77

- 5 杨志万.从一题多解谈球对称静电场的解析方法[J].高师理科学刊,2009(3):96~100

Promoting the Development of Core Accomplishment Based on *Multiple Solutions to One Problem*

Ma Shuhong Jiao Zhaoyong Jia Guangrui

(School of Physics, Henan Normal University, Xinxiang, Henan 453007)

Abstract: Three different methods are as an illustration applied to a typical case of aeroplane propeller, to solve the kinematics of a moving point of a rigid body in the general motion. And the characteristics of various solutions are discussed. By means of multi-solutions to a problem in physics learning, students can benefit more as to improve their problem-solving skills, develop their scientific thinking abilities and inspire their creative thinking as well.

Key words: general motion of a rigid body; resultant motion of a point; multi-solutions to a problem; creative thinking